ELI MAOR

e: A HISTÓRIA DE UM NÚMERO

RECORD

Quando o mundo estiver unido na busca do conhecimento,e não lutando por dinheiro e poder, então nossa sociedade enfim evoluira a um novo nível.

e: A HISTÓRIA DE UM NÚMERO

Criação ePub: RELÍQUIA

Tradução: JORGE CALIFE

Revisão Técnica: MICHELLE DYSMAN

5ª edição

EDITORA RECORD
RIO DE JANEIRO • SÃO PAULO
2008

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.
Maor, Eli
M253e e; a história de um número/Eli Maor; tradução de Jorge
5ª ed. Calife.-5ª ed.-Rio de Janeiro: Record, 2008.

Criação ePub: Relíquia
Tradução: Jorge Calife
Revisão Técnica: Michelle Dysman

Tradução de: e: the story of a number
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-01-05847-8
1. e (O número). I. Título.
CDD-512.73
03-0030 C D U-511.3

Título original em inglês:
e: THE STORY OF A NUMBER

Direitos exclusivos de publicação em língua portuguesa para o Brasil adquiridos pela
EDITORA RECORD LTDA.
Rua Argentina 171-Rio de Janeiro, RJ-20921-380-Tel.: 2585-2000
que se reserva a propriedade literária desta tradução

Impresso no Brasil
ISBN 978-85-01-05847-8
PEDIDOS PELO REEMBOLSO POSTAL

Caixa Postal 23.052
Rio de Janeiro, RJ-20922-970

Em memória de meus pais,
Richard e Luise Metzger

A filsofia está escrita nesse grande livro — ou seja, o Universo — que se encontra aberto continuamente ante os nossos olhos, mas ele não pode ser entendido a menos que se aprenda, primeiro, a ler sua linguagem e interpretar as letras com as quais o compuseram. Ele foi escrito no idioma da matemática e seus símbolos são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível entender uma única palavra de seu texto.

– GALILEU GALILEI, *Il Saggiatore* (1623)

Sumário

Prefácio

Eu devia ter nove ou dez anos de idade quando encontrei pela primeira vez o número π. Meu pai tinha um amigo, que era dono de uma oficina e rae levou um dia para visitar o lugar. A sala estava cheia de ferramentas e máquinas e um forte cheiro de óleo pairava sobre o local. Máquinas nunca me interessaram muito e o dono deve ter percebido o meu tédio quando me levou para uma das maiores, que tinha várias engrenagens. Ele me explicou que, não importa o quão grande ou pequena seja uma roda, existe sempre uma relação fixa entre sua circunferência e seu diâmetro, e esta proporção é de aproximadamente 3 1/7. Eu fiquei intrigado com esse número estranho e o assombro aumentou quando meu anfitrião acrescentou que ninguém conseguira ainda escrever aquele número com exatidão — só aproximadamente. E no entanto, tão importante ele era, que recebera um símbolo especial, a letra grega π. Por que, eu me perguntava, uma forma tão simples quanto um círculo teria um número tão estranho associado a ela? Eu não sabia que o mesmo número intrigara os cientistas durante quase quatro mil anos e que algumas perguntas a seu respeito ainda não tinham sido respondidas, mesmo hoje.

Vários anos depois, como um aluno de ginásio, estudando álgebra, eu fiquei fascinado com um segundo número estranho. O estudo dos logaritmos era uma parte importante do currículo, e naqueles dias, bem antes do aparecimento das calculadoras portáteis, o uso das tabelas de logaritmos era obrigatório para quem quer que desejasse estudar matemática avançada. Como eram temidas aquelas tabelas, com suas capas verdes, publicadas pelo Ministério de Educação de Israel. Você morria de tédio fazendo centenas de exercícios e esperando não pular uma fileira ou olhar na coluna errada. Os logaritmos que adotávamos eram chamados "comuns" — eles naturalmente usavam a base 10. Mas as tabelas também tinham uma página chamada "logaritmos naturais". E quando eu perguntei como alguma coisa poderia ser mais "natural" do que os logaritmos de base 10, meu professor respondeu que existia um número especial, simbolizado pela letra *e* e aproximadamente igual a 2,71828 usado como base na matemática "superior". Por que este número estranho? Eu tive que esperar até o quarto ano, quando estudamos cálculo, para descobrir.

Enquanto isso, π tinha uma espécie de irmão, e uma comparação entre os dois era inevitável, sobretudo porque os seus valores são muito próximos. Foi preciso que eu estudasse mais alguns anos na universidade para aprender que os dois irmãos de fato possuem uma relação estreita, e que este relacionamento é ainda mais misterioso pela presença de um terceiro símbolo, *i,* a famosa “unidade imaginária”, a raiz quadrada de-1. Assim, lá estavam todos os elementos de um drama matemático, esperando para ser contado.

A história do *n* tem sido muito relatada, sem dúvida porque ela recua até a antigüidade, mas também porque a maior parte dela pode ser compreendida sem um conhecimento de matemática avançada. Talvez nenhum livro seja melhor do que *Uma história de* π de Petr Beckmann, um modelo de explicação popular e contudo clara e precisa. O número *e* não se saiu tão bem. Não só ele é mais moderno, como sua história está muito ligada ao cálculo, assunto tradicionalmente considerado como uma entrada para a matemática “superior”. Pelo que sei, um livro sobre a história do *e,* comparável ao de Beckmann, ainda não apareceu, Eu espero que este trabalho preencha essa lacuna.

Meu objetivo é contar a história do *e* de um modo acessível a leitores com apenas um conhecimento modesto de matemática. Eu minimizei o uso da matemática no texto, deixando várias demonstrações e derivações para os apêndices. Também decidi me afastar do assunto principal, em várias ocasiões, de modo a explorar algumas questões paralelas de interesse histórico. Isso inclui alguns esboços biográficos de muitas personagens que desempenharam papéis na história do *e,* algumas das quais são raramente mencionadas nos livros-texto. Acima de tudo, quero mostrar a grande variedade de fenômenos — da física à biologia, da arte à música — relacionados com a função exponencial e^x, fazendo dela um objeto de interesse em campos muito além da matemática.

Em várias ocasiões afastei-me do modo tradicional como certos tópicos são apresentados nos livros de ensino de cálculo. Por exemplo, ao mostrar que a função $y = e^x$ *é* igual à sua derivada, a maioria dos livros primeiro deriva a fórmula $d(\ln x)/dx = 1/x$, o que é um processo longo. Só então, depois de invocar a regra da derivada da função inversa, é que se obtém o resultado desejado. Eu sempre achei que este é um processo desnecessariamente longo: pode-se derivar a fórmula $d(e^x)/dx = e^x$ diretamente — e de um modo muito mais rápido — mostrando que a derivada da função exponencial geral $y = b^x$ *é* proporcional a b^x e a seguir encontrando o valor de b para o qual a constante de proporcionalidade é igual a 1 (esta derivação é fornecida no Apêndice 4). Para a expressão cos x+i sen x, que aparece com tanta freqüência na matemática superior, usei a notação concisa cis x e espero que esta notação mais curta seja usada com maior assiduidade. Ao considerar as analogias que existem entre as funções circulares e hiperbólicas, um dos resultados mais belos, descoberto em torno de 1750 por Vincenzo Riccati, é que, nos dois tipos de funções, as variáveis independentes podem ser interpretadas geometricamente como uma área, tornando as semelhanças formais entre os dois tipos de funções ainda mais extraordinárias. Este fato — raramente mencionado nos livros-texto — é discutido no Capítulo 12 e de novo no Apêndice 7.

Ao longo da minha pesquisa, um fato ficou imediatamente claro: o número *e* era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do cálculo (ele já é mencionado na tradução inglesa de Edward Wright do trabalho de John Napier sobre logaritmos, publicado em 1618). Como foi isso possível? Uma explicação virtual é a de que o número *e* teria aparecido primeiro ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos. Alguém — não se sabe quem ou quando — deve ter notado o fato curioso de que se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa anual de juros r *e* se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P(1+r/n)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite, para $P = 1$, $r = 1$ e $t = 1$, é aproximadamente 2,718. Esta descoberta — provavelmente mais uma observação experimental do que uma dedução matemática rigorosa — deve ter assombrado os matemáticos do início do século XVII, para quem o conceito de limite não era ainda conhecido. Assim, as origens do número *e* e da função exponencial e^x podem muito bem estar ligadas a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo. Veremos entretanto que outras questões — notavelmente a área sob a hipérbole $y = 1/x$ — conduziram, independentemente, ao mesmo número, deixando a origem exata do *e* cercada de mistério. O papel bem mais familiar do *e* como uma base "natural" dos logaritmos teve que esperar até o trabalho de Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII, que deu à função exponencial o papel central que ela desempenha no cálculo.

Fiz todo o possível para obter nomes e datas precisas, embora as fontes muitas vezes forneçam informações conflitantes, principalmente sobre a prioridade de certas descobertas, O início do século XVII foi um período de atividade matemática sem precedentes e amiúde vários cientistas, sem conhecer o trabalho de seus colegas, desenvolviam as mesmas idéias e chegavam a resultados similares, geralmente ao mesmo tempo. A prática de publicar os resultados das pesquisas em revistas científicas ainda não era comum; por isso algumas das maiores descobertas da época foram comunicadas ao mundo na forma de cartas, panfletos ou livros de circulação limitada, tornando difícil identificar quem descobrira primeiro isto ou aquilo. Essa situação desagradável chegou ao clímax na amarga disputa em torno da invenção do cálculo, um acontecimento que fez as melhores mentes da época se voltarem umas contras as outras, o que foi responsável, em boa parte, pelo atraso da matemática na Inglaterra quase um século depois de Newton.

Como uma pessoa que aprendeu matemática em todos os níveis universitários, estou ciente da atitude negativa de muitos estudantes em relação a esta disciplina. Existem vários motivos para isso, sendo um deles o modo esotérico e seco com que o tema *é* ensinado. Temos a propensão de sobrecarregar nossos estudantes com fórmulas, definições, teoremas e demonstrações, mas raramente mencionamos a evolução histórica desses fatos, deixando a impressão de que eles foram entregues à humanidade como os Dez Mandamentos, por alguma autoridade divina. A história da matemática é uma boa maneira de corrigir essa impressão. Nas minhas classes eu sempre tento introduzir algumas pitadas de registros da matemática e vinhetas sobre as pessoas cujos nomes ficaram associados às fórmulas e aos teoremas. Este livro deriva parcialmente dessa abordagem e espero que cumpra o seu objetivo.

Muito obrigado a minha mulher, Daíia, pela ajuda inestimável e o apoio que me deu para que o livro fosse escrito, e a meu filho Eyal por desenhar as ilustrações. Sem eles este livro nunca se teria tornado uma realidade.

Skokie, Illinois
7 de janeiro de 1993

1

John Napier, {*} 1614

Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades.

— JOHN Napier, *Mirifici logarithmorum canonis Descriptio* (1614)[1]

Raramente na história da ciência uma idéia matemática abstrata foi recebida de modo mais entusiástico por toda a comunidade científica do que a invenção dos logaritmos. E dificilmente podemos imaginar uma pessoa com menos probabilidade de realizar essa invenção. Seu nome era John Napier.[2]

Filho de Sir Archibald Napier e de sua primeira esposa, Janet Bothwell, John nasceu em 1550 (a data exata é desconhecida) na propriedade de sua família, o castelo Merchiston, perto de Edimburgo, na Escócia. Os detalhes de sua infância são imprecisos. Com treze anos de idade ele foi mandado para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião. Após uma curta permanência no exterior, voltou para sua terra natal em 1571 e casou-se com Elizabeth

Stirling, com quem teve dois filhos. Depois da morte de sua esposa, em 1579, ele se casou com Agnes Chisholm, e eles tiveram dez filhos. O segundo filho deste casamento, Robert, mais tarde cuidaria da obra literária de seu pai. Após a morte de Sir Archibald, em 1608, John retornou a Merchiston, onde, como o oitavo senhor do castelo, passou o resto de sua vida.[3]

As atividades iniciais de Napier não sugeriam um futuro de criatividade matemática. Seu interesse principal estava na religião, ou melhor, no ativismo religioso. Protestante ardoroso e firme oponente do papado, publicou seus pontos de vista em *A Plaine Discovery ofthe whole Revelation ofSaint John* (1593), um livro no qual atacava duramente a Igreja Católica, afirmando que o papa era o Anticristo e conclamando o rei escocês Jaime VI (que mais tarde se tornaria o rei James I da Inglaterra) a expurgar de sua corte todos os “papistas, ateus e hereges”.[4] Ele também previa que o dia do Juízo Final aconteceria entre 1688 e 1700. O livro foi traduzido em vários idiomas e teve 21 edições (dez delas lançadas durante a vida do autor), o que deixou Napier confiante de que seu nome na história — ou no pouco que dela restaria — estava garantido.

Entretanto os interesses de Napier não estavam confinados à religião. Como dono de terras, interessado na melhoria das colheitas e do gado, ele experimentou vários estercos e sais para fertilizar o solo. Em 1579 inventou um parafuso hidráulico para controlar o nível da água nas minas de carvão. Também demonstrou um agudo interesse pelas questões militares, sem dúvida sendo afetado pelo temor geral de que o rei Filipe II da Espanha estivesse se preparando para invadir a Inglaterra. Napier fez planos para construir enormes espelhos, capazes de incendiar os navios inimigos, uma reminiscência dos planos de Arquimedes para a defesa de Siracusa, dezoito séculos antes de sua época. Ele imaginou uma peça de artilharia capaz de “limpar um campo numa circunferência de quatro milhas (6,4 km), exterminando todas as criaturas vivas com mais de um pé de altura” (cerca de 30 cm), uma carruagem com uma “boca móvel de fogo ardente” que “espalharia a destruição por todos os lados” e até mesmo um engenho capaz de “navegar debaixo d’água, com mergulhadores e outros estratagemas para destruir os inimigos” — todos antepassados da tecnologia militar moderna.[5] Não se sabe se alguma dessas máquinas chegou a ser construída.

Como freqüentemente acontece com homens de interesses tão diversificados, Napier tornou-se personagem de muitas histórias. Ele parece ter sido um tipo brigão,, envolvendo-se amiude em disputas com seus vizinhos e inquilinos. De acordo com uma história, Napier teria ficado irritado com os pombos de um vizinho, que desciam em sua propriedade para comer seus grãos. Advertido por Napier de que, se não detivesse os pombos, eles seriam capturados, o vizinho ignorou a ameaça. No dia seguinte encontrou seus pombos caídos, semimortos, no jardim de Napier. Este simplesmente empapara os grãos com uma forte solução alcoólica, de modo que os pássaros se embriagaram e quase não podiam se mover. De acordo com outra história, Napier suspeitava de que um de seus empregados o estava roubando. Ele anunciou que seu galo preto identificaria o transgressor. Os servos foram colocados em uma sala escura, onde cada um deveria passar a mão no dorso do galo. Sem que os servos soubessem, Napier tinha coberto a ave com uma camada de fuligem. Ao saírem da sala, cada empregado deveria mostrar as mãos: o culpado, temendo tocar no galo, estava com as mãos limpas e revelou sua culpa.[6]

Todas essas atividades, incluindo as ardentes campanhas religiosas de Napier, há muito foram esquecidas. Se seu nome pertence a história não é por causa do seu livro campeão de vendas ou da sua engenhosidade mecânica, mas devido a uma idéia matemática abstrata, que ele levou 20 anos para desenvolver: os logaritmos.

ooo

O século XVI e o início do XVII testemunharam uma enorme expansão do conhecimento científico em todos os campos. A geografia, a física e a astronomia, livres de antigos dogmas, mudaram rapidamente a percepção que o homem tinha do universo. O sistema heliocêntrico de Copérnico, depois de lutar durante quase um século contra as resoluções da Igreja, encontrara finalmente a aceitação. A circunavegação do globo por Magalhães, em 1521, anunciou uma nova era de exploração marítima que não deixaria um canto do mundo sem ser visitado. Em 1569 Gerhard Mercator publicou o seu aclamado novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na arte da navegação. Na Itália, Galiíeu Galilei estabelecia as fundações da ciência da mecânica, enquanto na Alemanha Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia, de uma vez por todas, do universo geocêntrico dos gregos. Esses desenvolvimentos envolviam uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos tediosos. A época pedia uma invenção que livrasse os cientistas, de uma vez por todas, deste fardo. Napier aceitou o desafio.

Não temos um relato sobre como Napier tropeçou na idéia que resultaria em sua invenção. Ele era bem versado em trigonometria e sem dúvida estava familiarizado com a fórmula:

$$\text{sen}\, A.\ \text{sen}\, B = 1/2[\cos\,(A\text{-}B)\text{-}\cos\,(A\text{+}5)]$$

Esta fórmula, e outras semelhantes para cos *A.* cos *B* e sen *A.* cos *B,* eram conhecidas como *regras prostafaréticas,* da palavra grega que significa "adição e subtração". Sua importância consiste no fato de que o produto de duas expressões trigonométricas, tais como sen *A.* sen *B* pode ser computado determinando-se a soma ou a diferença de outras expressões trigonométricas, neste caso cos *(A-B)* e cos *(A+B).* E como é mais fácil somar e subtrair do que multiplicar e dividir, essas fórmulas fornecem um sistema primitivo de redução de uma operação aritmética para a outra, mais simples. E foi provavelmente essa idéia que colocou Napier no caminho certo.

Uma segunda idéia, mais direta, envolvia os termos de uma *progressão geométrica,* uma seqüência de números com proporção fixa entre os termos sucessivos. Por exemplo, a seqüência 1, 2, 4, 8, 16,… é uma progressão geométrica de razão 2. Se simbolizarmos a razão pela letra *q,* então, começando com o 1, os termos da progressão são 1, q, q^2, q^3 e assim por diante (note que o termo n é q^{n-1}), Muito antes da época de Napier já fora notado que existe uma relação simples entre os termos de uma progressão geométrica e os *expoentes* ou índices, da razão comum. O matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), em seu livro *Arithmetica integra* (1544), formulou esta relação como se segue: Se multiplicarmos quaisquer dois termos da progressão 1, q, q^2,… o resultado será o mesmo que se *soniarmos* os expoentes correspondentes.[7] Por exemplo, $q^2.\ q^3 = (q.\ q).\ (q.\ q.\ q)\text{-}q.\ q.\ q.\ q.\ q = q^5$, um resultado que poderíamos ter obtido somando os expoentes 2 e 3. De modo semelhante, dividir um termo de uma expressão geométrica por outro equivale a *subtrair* seus expoentes: $q^5/q^3 = (q.\ q.\ q.\ q.\ q)/(q.\ q.\ q) = q.\ q = q2 = q^{5-3}$. E assim temos a regra simples $q^m.\ q^n = q^{m+n}$ *e* $q^m/q^n = q^{m-n}$.

Surge um problema, entretanto, se o expoente do denominador for maior do que o do numerador, como em q^3/q^5; nossa regra nos daria $q^{3-5} = q^{-2}$, uma expressão que ainda não definimos. Para evitar essa dificuldade nós simplesmente definimos q^{-n} como sendo igual a $1/q^n$, de modo que $q^{3-5} = q^{-2}$-$1/q^2$, o que está de acordo com o resultado obtido se dividirmos q^3 por q^5 diretamente.[8] (Note que, de modo a ser consistente com a regra $q^m/q^n = q^{m-n}$ quando $m = n$ nós também precisamos definir $q^0 = 1$.) Com essas definições nós agora podemos estender uma progressão geométrica infinitamente em ambas as direções: ..., q^{-3}, q^{-2}, $q^{-1}, q^0 = 1, q, q^{-2}, q^3$, ... Verificamos que cada termo é uma potência de uma razão comum q, e que os expoentes-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, ... formam uma *progressão aritmética* (em uma progressão aritmética a *diferença* entre os termos sucessivos é constante, neste caso sendo um). Esta relação é a idéia-chave por trás dos logaritmos, mas onde Stifel tinha em mente apenas expoentes inteiros, a idéia de Napier era estendê-los para uma faixa contínua de valores.

Sua linha de pensamento era a seguinte: se pudermos escrever *qualquer* número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então *a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes).* Além disso, elevar um número a enésima potência (isto é, multiplicá-lo por si mesmo n vezes) seria equivalente a *somar* o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n — e encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas — ou seja, a divisão por n. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

Vamos ilustrar como esta idéia funciona escolhendo como nossa base o número 2. A tabela 1.1 mostra as potências sucessivas de 2, começando com $n = -3$ e terminando com $n = 12$. Suponha que queremos multiplicar 128 por 32. Nós procuramos na tabela os expoentes correspondentes a 32 e a 128 e descobrimos que eles são, respectivamente, 5 e 7. Somando esses expoentes, obtemos 12. Agora revertemos o processo, procurando o número cujo expoente correspondente é 12; este número é 4.096, a resposta desejada. Como segundo exemplo, suponha que queremos calcular 4^5. Nós encontramos o expoente correpondente a 4, ou seja, 2 e desta vez o *multiplicamos* por 5 obtendo 10.

Então procuramos o numero cujo expoente é 10 e encontramos 1.024. E de fato, $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1.024$

TABELA 1.1. Potências de 2

n	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024	2.048	4.096

É claro que um esquema tão elaborado é desnecessário para calcular meramente com inteiros. Esse método só teria utilidade prática se pudesse ser usado com quaisquer números, inteiros ou frações. Mas para que isso aconteça nós precisamos primeiro preencher os grandes espaços entre os números de nossa tabela. Isso pode ser feito de duas maneiras: usando expoentes fracionários ou escolhendo como base um número suficientemente pequeno, de modo que suas potências cresçam de uma maneira razoavelmente lenta. Expoentes fracionários, definidos por $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (por exemplo, $2^{5/3} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} = 3{,}17480$), não eram inteiramente conhecidos na época de Napier,[9] assim ele não teve outra escolha senão seguir a segunda opção. Mas quão pequena deve ser a base? Claramente, se a base for *muito* pequena suas potências crescerão muito devagar, novamente tornando o sistema de pouco uso prático. Parece que um número próximo de 1, mas não muito próximo, seria um compromisso razoável. Depois de passar anos lutando com esse problema, Napier decidiu-se por 0,9999999, ou $1 - 10^{-7}$.

Mas por que essa escolha em particular? A resposta parece estar na preocupação de Napier em minimizar o uso de frações decimais. É claro que, de um modo geral, as frações têm sido usadas por milhares de anos antes da época de Napier, mas elas eram quase sempre escritas como frações comuns, isto é, proporções entre números inteiros. As frações *decimais,* ou seja, a extensão do nosso sistema de numeração decimal para números menores do que 1, só recentemente tinham sido introduzidas na Europa,[10] e o público ainda não se sentia confortável com elas. Para minimizar o seu uso, Napier fez, essencialmente, o que fazemos hoje quando dividimos um dólar em cem centavos ou um quilômetro em mil metros: ele dividiu a unidade num grande número de subunidades, considerando cada uma como uma nova unidade. E como seu principal objetivo era reduzir o enorme trabalho envolvido nos cálculos trigonométricos, ele seguiu a prática então usada na trigonometria de dividir o raio de um círculo unitário em 10.000.000 ou 10^7 partes. Portanto, ao subtrair de uma unidade inteira sua 10^7 parte, obtemos o número mais próximo de 1 nesse sistema, ou seja $1\text{-}10^7$ ou 0,9999999. Aí está a taxa comum ("proporção", em suas palavras) que Napier usou para construir sua tabela.

E depois ele partiu para a tarefa de encontrar, através de tediosas subtrações repetidas, os termos sucessivos de sua progressão. Esta certamente deve ter sido uma das tarefas mais aborrecidas que um cientista já enfrentou. Mas Napier a levou adiante, consumindo vinte anos de sua vida (1594-1614) para completar o trabalho. Sua tabela inicial continha apenas 101 elementos, começando com 10^7 =10.000.000, seguida de 10^7 $(1\text{-}10^{-7})$ =9.999.999, então 10^7 $(1\text{-}10\text{-}^7)^2$ =9.999.998 e daí em diante até $10^7(1\text{-}10^{-7})^{100}$ =9.999.900 (ignorando a parte fracionária 0,0004950), cada termo sendo obtido subtraindo-se do termo anterior sua 10^7 parte. Ele então repetiu o processo todo de novo, começando uma vez mais com 10^7, mas dessa vez tomando como sua proporção a relação entre o último número e o primeiro em sua tabela original, isto é, 9-999-900: 10.000.000 =0,99999, ou $1 — 10^{-5}$. Esta segunda tabela continha cinqüenta e um elementos, o último sendo 10^7 $(1\text{-}10^{-5})^{50}$ ou, muito aproximadamente 9.995.001. Seguiu-se uma terceira tabela com vinte e um elementos, usando-se a proporção 9.995.001: 10.000.000; o último elemento nesta tabela sendo 10^7 x $0{,}9995^{20}$, ou aproximadamente 9.900.473. E finalmente, de cada elemento em sua última tabela Napier criou mais sessenta e oito elementos, usando a proporção 9.900.473: 10.000.000, ou aproximadamente 0,99; o último elemento então sendo 9.900.473 x $0{,}99^{68}$, ou mais ou menos 4.998.609 — mais ou menos a metade do número original.

Hoje, é claro, esta tarefa seria delegada a um computador. Até mesmo com uma calculadora de bolso o trabalho poderia ser feito em algumas horas. Mas Napier teve que fazer todos os cálculos com papel e pena. Pode-se, portanto, entender sua preocupação em minimizar o uso de frações decimais. Em suas próprias palavras: "Ao formar esta progressão (os elementos da segunda tabela), como a proporção entre 10000000,00000, o primeiro número da segunda tabela, e 9995001,222927, o último número, é problemática; assim, compute os 21 números como proporções fáceis de 10000 para 9995, que é um valor suficientemente próximo; o último deles, se você não cometeu nenhum erro, será 9900473,57808."[11]

Tendo completado sua tarefa monumental, restava a Napier batizar sua criação. A princípio ele chamou o expoente de cada potência de "número artificial", mas depois se decidiu pelo termo *logaritmo,* a palavra significando "número proporcional". Na notação moderna isto significa dizer que se (na primeira tabela) $N = 10^7 (1-10^{-7})^L$, então o expoente *L é o* logaritmo (neperiano) de *N.* A definição de logaritmos feita por Napier difere em vários aspectos da definição moderna (introduzida em 1728, por Leonhard Euler): se $N = b^L$, onde *b é* um número positivo fixo, diferente de 1, então *L é o* logaritmo (de base *b)* de *N.* Assim, pelo sistema de Napier, $L = 0$ corresponde a $N = 10^7$ (ou seja, log Nap $10^7 = 0$), enquanto no sistema moderno $L = 0$ corresponde a $N = 1$ (isto é, $\log_b 1 = 0$). Ainda mais importante, as regras básicas das operações com logaritmos — por exemplo, que o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos individuais — não se mantém para as definições de Napier. E, finalmente, como $1-10^7$ é menor que 1, os logaritmos de Napier *diminuem* com o aumento dos números, enquanto nossos logaritmos comuns (de base 10) aumentam. Essas diferenças são relativamente menos importantes e derivam da insistência de Napier em que a unidade deveria ser igual a 10^7 subunidades, Se ele não estivesse tão preocupado com as frações decimais, sua definição poderia ter sido mais simples e mais próxima da moderna.[12]

Em retrospectiva, esta preocupação parece um desvio desnecessário. Mas ao fazê-la, Napier chegou muito perto de descobrir um número que, um século depois, seria reconhecido como a base universal dos logaritmos e que desempenharia, na matemática, um papel secundário apenas em relação ao número π. Este número é o *e* limite de $(1+1/n)^n$ quando *n* tende ao infinito.[13]

NOTAS E FONTES

1. Como citado no livro de George A. Gibson, "Napier and the Invention ofLogarithms," em *Handbook oftbe Napier Tercentenary Celebration, or Modem Instruments andMethods of Calculation,* ed. E. M. Horsburgh (1914; reeditado: Los Angeles: Tomash

Publishers, 1982), p. 9.

2. O nome tem aparecido em formas tão diversas quanto Nepair Neper e Naipper, a grafia correta parece desconhecida. Ver Gibson, em "Napier and the Invention of Logarithms", p. 3.
3. A genealogia da família foi registrada por um dos descendentes de John, Mark Napier, em *Memoirs of John Napier of Merckiston: His Lineage, Life and Times* (Edimburgo, 1834).
4. P. Hume Brown, em "John Napier of Merchiston", em *Napier Tercentenary Memorial Volume,* editado por Cargill Gilston Knott (Londres: Longmans, Green and Company, 1915), p. 42.
5. Idem, p. 47.
6. Idem, p. 45.
7. Ver David Eugene Smith, "The Law of Exponents in the Works of the Sixteenth Century", em *Napier Tercentenary Memorial Volume,* p. 81.
8. Expoentes negativos e fracionários têm sido sugeridos por alguns matemáticos desde o século XTV, mas o seu uso generalizado é devido ao matemático inglês John Wallis (16161703) e ainda mais a Newton, que sugeriu a notação moderna a^{-n} e $a^{m/n}$ em 1676. Ver Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations,* vol. 1, *Elementary Matbematics* (1928; reeditado por LaSalle, 111.: Open Court, 1951), pp. 354-356.
9. Ver nota 8.
10. Pelo cientista flamengo Simon Stevin (ou Stevinius, 1548-1620).
11. Citado no livro de David Eugene Smith, *A Source Book in Matkematics* (1929; reeditado em Nova York: Dover, 1959), p. 150.
12. Alguns dos outros aspectos dos logaritmos de Napier são discutidos no Apêndice 1.
13. Na verdade, Napier chegou perto de descobrir o número $1/e$ definido como o limite de $(1-1/n)^n$ quando n tende ao infinito. Como vimos, sua definição de logaritmos eqüivale à equação $N = 10^7(1-10^{-7})^L$. Se dividirmos ambos, N e L, por 10^7 (o que meramente significa mudar a escala de nossas variáveis), a

equação se torna $N^*=[1\text{-}10^{-7})^{10}]^{L^*}$, onde N^*=M10^7 e L^*=L/10^7. E desde que $(1\text{-}10^{-7})10^7 = (1\text{-}1/10^7)10^7$ é um valor muito próximo de l/*e*, os logaritmos de Napier são, virtualmente, logaritmos de base l/*e*. Mas a declaração, feita com freqüência, de que Napier descobriu esta base (ou mesmo o próprio *e)* é errada. Como vimos, ele não pensava em termos de base, um conceito que só foi desenvolvido depois com a introdução dos logaritmos "comuns" (base 10).

2

Reconhecimento

Os poderes miraculosos dos cálculos modernos se devem a três invenções: a notação arábica, as frações decimais e os logaritmos.
– FLORIAN CAJORI, *A History of Matbematics* (1893)

Napier publicou sua invenção em 1614 num tratado em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos). Um trabalho posterior, *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos), foi publicado postumamente por seu filho Robert em 1619. Raramente, na história da ciência, uma nova idéia foi recebida de modo mais entusiástico. O reconhecimento universal caiu sobre seu inventor e a invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda a Europa e até mesmo da distante China. Um dos primeiros a utilizar os logaritmos foi o astrônomo Johannes Kepler, que os utilizou com grande sucesso em seus elaborados cálculos das órbitas planetárias.

Henry Briggs (1561-1631) era professor de geometria do Colégio Gresham em Londres quando a notícia das tabelas de Napier chegou ao seu conhecimento. Ele ficou tão impressionado com a nova invenção que resolveu ir até a Escócia e se encontrar com o grande inventor em pessoa. Temos um pitoresco relato deste encontro feito por um astrólogo chamado William Lilly (1602-1681):


MIRIFICI

LOGARITHMORVM CANONIS DESCRIPTIO,

Ejusque usus, in utraque Trigonometria; *ut etiam in omni Logistica Mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio.*

ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;

Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines.

Secundò, Appendix de alia, eâque præstantiore Logarithmorum specie construenda.

Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Triangula sphærica mirâ facilitate resolvenda.

Autore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto.

EDINBVRGI,
EXCVDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Figura 1. Folha de rosto da edição de 1619 do *Mtrifici logarithmorum canonis descriptío* de Napier, que também contém o seu *Constructio.*

Um certo John Marr, excelente matemático e geômetra, chegara na Escócia antes de Sr. Briggs, com o propósito de estar presente quando duas pessoas tão cultas se encontrassem. Sr. Briggs marcou um certo dia para o encontro em Edimburgo, mas não comparecendo, Lord Napier passou a duvidar que ele viria. "Ah John", diz Napier, "o senhor Briggs não vai vir mais." Naquele momento alguém bate no portão. John Marr desce correndo e recebe o senhor Briggs para sua grande alegria. Ele o leva até a câmara do lorde, onde os dois passam quase um quarto de hora se admirando, antes que alguém diga alguma coisa. Finalmente Briggs diz: "Meu senhor, eu realizei esta longa jornada com o propósito de vê-lo em pessoa, e para saber por que artifício de inteligência e engenhosidade o senhor concebeu esta excelente ajuda para a astronomia, os logaritmos, e, tendo-os descoberto, eu me pergunto por que ninguém mais pensou nisso antes, agora que sabemos que é tão fácil."[1]

Naquele encontro Briggs propôs duas modificações que tornariam as tabelas de Napier mais convenientes: fazer o logaritmo de 1 igual a zero, no lugar de 10^7, e ter o logaritmo de 10 igual a uma potência apropriada de 10. Depois de considerarem várias possibilidades eles finalmente decidiram que $\log 10 = 1 = 10^{0}$. No fraseado moderno isto significa dizer que se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$, então *L é o* briggsiano ou logaritmo "comum" de N, escrito como $\log_{10} N$, ou, simplesmente $\log N$. Assim nasceu o conceito de *base.*[2]

Napier prontamente concordou com tais sugestões, mas a essa altura sua idade já ia avançada e ele não tinha mais a energia para computar as novas tabelas. Briggs fez esse trabalho, publicando seus resultados em 1624 sob o título *Arithmetica logarithmica.* Suas tábuas davam os logaritmos de base 10 para todos os inteiros de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com uma precisão de quatorze decimais. O espaço entre 20.000 e 90.000 foi mais tarde preenchido por Adriaan Vlacq (1600-1667), um editor holandês, e seus acréscimos foram incluídos na segunda edição da *Arithmetica logarithmica* (1628). Com pequenas revisões este trabalho se manteve como a base para todas as tabelas de logaritmos subseqüentes, até o nosso século. Foi só em 1924 que começou o trabalho num novo conjunto de tabelas, com precisão de 20 casas decimais, feito na Inglaterra como parte das celebrações do tricentenário da invenção dos logaritmos. Esse trabalho foi terminado em 1949.

Napier fez outras contribuições à matemática. Inventou os roletes ou "ossos" que receberam seu nome — trata-se de um engenho mecânico para fazer multiplicações e divisões — e concebeu uma série de regras, conhecidas como "analogias de Napier" para serem usadas na trigonometria esférica. Ele defendeu o uso da vírgula para separar a parte inteira de um número da parte fracionária, uma notação que simplificou muito a representação das frações decimais. Entretanto nenhuma dessas realizações se compara com o significado de sua invenção dos logaritmos. Nas comemorações dos 300 anos dos logaritmos em Edimburgo, em 1914, Lord Moulton falou em sua homenagem. "A invenção dos logaritmos chegou ao mundo como um relâmpago num dia claro. Nenhum trabalho anterior conduziu a ela, ou previu, ou sugeriu o seu aparecimento. Ela permanece isolada, surgindo abruptamente no pensamento humano, sem derivar do trabalho de outros intelectos ou seguir linhas conhecidas de pensamento matemático."[3] Napier morreu em sua propriedade no dia 3 de abril de 1617 com a idade de 67 anos e foi enterrado na igreja de St. Cuthbert, em Edimburgo.[4]

Em 1619 Hcnry Briggs tornou-se o primeiro professor saviliano de geometria na Universidade de Oxford, inaugurando uma linha de distintos cientistas britânicos que ocupariam esta cadeira, entre eles John Wallis, Edmond Halley e Christopher Wren. Ao mesmo tempo manteve seu cargo anterior no Gresham College, ocupando a cadeira que fora fundada em 1596 por Sir Thomas Gresham, o mais antigo professorado de matemática na Inglaterra. E manteve os dois postos até sua morte em 1631.

Uma outra pessoa reclamou o título de inventor dos logaritmos. Jobst ou Joost Bürgi (1552-1632), um fabricante de relógios suíço, criou uma tabela de logaritmos usando o mesmo esquema geral de Napier, mas com uma diferença significativa: Onde Napier tinha usado a proporção comum $1\text{-}10^{-7}$, que é ligeiramente menor do que 1, Bürgi usou $1+10^{-4}$,um número um pouco maior do que 1. Daí que os logaritmos de Bürgi *aumentam* à medida que os números aumentam, enquanto os de Napier diminuem. Como Napier, Bürgi estava muito preocupado em evitar as frações decimais, tornando sua definição dos logaritmos mais complicada do que era necessário. Se um inteiro positivo N for escrito como $N = 10^8(1+10^{-4})^L$, então Bürgi chamava o número $10L$ (em vez de L), de "número vermelho" correspondente ao "número negro" N. (Em sua tabela esses números eram realmente impressos em vermelho e preto, daí a nomenclatura.) Ele colocava os números vermelhos — isto é, os logaritmos — na margem e os números pretos no corpo da página, construindo, em essência, uma tabela de "antilogaritmos". Existem evidências de que Bürgi chegou a esta invenção tão cedo quanto 1588, seis anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma idéia, mas, por algum motivo, ele só a publicou em 1620, quando sua tabela foi impressa, anonimamente, em Praga. Em questões acadêmicas uma regra de ouro é "publique ou morra". Ao atrasar a publicação, Bürgi perdeu seu direito à prioridade em uma descoberta histórica. Hoje seu nome está quase esquecido, exceto entre os historiadores da ciência.[5]

O uso dos logaritmos se espalhou rapidamente pela Europa. A *Descriptio* de Napier foi traduzida para o inglês por Edward Wright (cerca de 1560-1615), um matemático inglês e fabricante de instrumentos e publicada em Londres em 1616. As tabelas de Briggs e Vlacq para logaritmos comuns foram publicadas na Holanda em 1628. O matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1647), contemporâneo de Galileu e um dos precursores do cálculo, divulgou o uso dos logaritmos na Itália, assim como Johannes Kepler o fez na Alemanha. É interessante notar que o país seguinte a adotar a nova invenção foi a China, onde apareceu, em 1653, um tratado sobre logaritmos escrito por Xue Fengzuo, um discípulo do jesuíta polonês John Nicholas Smoguleçki (1611-1656). As tabelas de Vlacq foram reimpressas em Pequim em 1713 no *Lü-Li Yuan Yuan* (Oceano de almanaques de cálculos). Um trabalho posterior, *Shu Li Ching Yün* (Coletânea de princípios básicos de matemática) foi publicado em Pequim em 1722 e acabou chegando ao Japão. Toda esta atividade foi um resultado da presença dos jesuítas na China e de seu compromisso em propagar a ciência ocidental.[6]

Tão logo a comunidade científica adotou os logaritmos, alguns inovadores perceberam que um engenho mecânico poderia ser construído para fazer os cálculos com eles. A idéia era usar uma régua, na qual os números poderiam ser colocados em espaços proporcionais aos seus logaritmos. O primeiro modelo, um tanto primitivo, foi construído por Edmund Gunter (1581-1626), um sacerdote inglês que mais tarde tornou-se professor de astronomia no Gresham College. Seu engenho surgiu em 1620 e consistia em uma única escala íogarítmica ao longo da qual distâncias podiam ser medidas e a seguir somadas ou subtraídas com um par de compassos. A idéia de usar *duas* escalas logarítmicas que se pudessem mover, uma em relação a outra, originou-se com William Oughtred (1574-1660), que, como Gunter, era também clérigo e matemático. Oughtred parece ter inventado seu instrumento em 1622, mas a descrição só foi publicada dez anos depois. De fato Oughtred construiu duas versões: uma régua de cálculo linear e uma circular, onde as duas escalas eram marcadas em discos que podiam girar em torno de um eixo comum.[7]

Embora Oughtred não ocupasse nenhuma posição em universidade, suas contribuições para a matemática foram substanciais. Em seu trabalho mais importante, o *Clavis mathematicae* (1631), um livro sobre aritmética e álgebra, ele introduziu muitos símbolos matemáticos novos, alguns dos quais são usados ainda hoje. (Entre eles está o símbolo X para a multiplicação, mais tarde criticado por Leibniz devido à sua semelhança com a letra *x;* dois outros símbolos, que ainda podem ser vistos ocasionalmente, são:: para denotar proporção e~para "diferença entre".) Hoje consideramos naturais os numerosos símbolos que aparecem na literatura matemática, mas cada um deles tem a sua história, que freqüentemente reflete o estado da matemática na ocasião em que foi criado. Os símbolos às vezes eram inventados como um capricho pelos matemáticos; mas com mais freqüência são o resultado de uma lenta evolução, e Oughtred desempenhou um papel importante neste processo. Outro matemático que fez muito para melhorar a notação matemática foi Leonhard Euler, que terá um papel de destaque mais tarde, em nossa história.

Existem muitos relatos a respeito da vida de Oughtred. Como estudante no King's College, em Cambridge, ele passava dias e noites mergulhado em seus estudos, e nós sabemos disso pelo seu próprio relato: "O tempo anterior e posterior aos estudos normais eu empreguei nas ciências matemáticas. Perdi noite após noite de sono, privando meu corpo e o acostumando à vigília, ao frio e ao trabalho enquanto os outros repousavam."[8] Também temos essa pitoresca descrição de Oughtred no interessante (embora nem sempre confiável) *BríefLives,* de John Aubrey:

> Ele era um homenzinho de cabelos e olhos negros (com um bocado de vitalidade). Sua cabeça estava sempre trabalhando em alguma coisa. Costumava desenhar linhas e diagramas na poeira … e não ia para o quarto antes das onze ou da meia-noite … costumava estudar até tarde da noite, tinha um isqueiro sempre com ele e em cima da cabeceira da cama prendera seu tinteiro. Dormia pouco, às vezes passava duas ou três noites sem dormir.[9]

Embora pareça ter violado todos os princípios da boa saúde, Oughtred morreu com a idade de 86 anos, dizem que de alegria, ao ouvir que o rei Carlos II fora reconduzido ao trono.

Como no caso dos logaritmos, reivindicações quanto à prioridade na invenção da régua de cálculo também aconteceram. Em 1630, Richard

Delamain, aluno de Oughtred, publicou um trabalho curto intitulado *Grammelogia, or The Mathematicall Ring,* no qual descrevia uma régua de cálculo circular que tinha inventado. No prefácio, destinado ao rei Carlos I (a quem enviou uma régua de cálculo e uma cópia do livro), Delamain menciona a facilidade do uso do aparelho, notando que "era adequado para ser usado … tanto em cima de um cavalo quanto a pé".[10] Delamain cuidou de patentear a invenção, acreditando que sua autoria e seu nome estariam assegurados na história. Entretanto, outro aluno de Oughtred, William Forster, afirmou ter visto aquela régua de cálculo na casa de Delamain, alguns anos antes, insinuando que ele roubara a idéia de Oughtred. Seguiu-se uma série de acusações e réplicas, como era de esperar, já que nada é mais prejudicial para a reputação de um cientista do que uma acusação de plágio. Hoje em dia aceita-se que o inventor da régua de cálculo foi Oughtred, mas não existem evidências para apoiar a afirmação de Forster de que Delamain roubara a invenção. Em todo o caso, a disputa há muito foi esquecida, sendo, logo depois, ofuscada por uma disputa ainda mais acirrada em torno de uma invenção até mais importante: o cálculo.

A régua de cálculo, em suas muitas variedades, foi a companheira fiel de todos os cientistas e engenheiros durante os 350 anos que se seguiram, sendo dada de presente pelos pais, a seus filhos e filhas, quando se graduavam no ginásio. Então, no início da década de 1970 apareceram no mercado as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e no espaço de dez anos a régua de cálculo tornou-se obsoleta. (Em 1980, uma das principais indústrias de instrumentos científicos dos Estados Unidos, Keuffel & Esser, deixou de fabricar suas réguas de cálculo, pelas quais era famosa desde 1891.[11]) Quanto às tabelas de logaritmos, elas se saíram um pouco melhor: ainda podemos encontrá-las no final dos livros de álgebra, silenciosa lembrança de uma ferramenta que sobreviveu à sua utilidade. Mas não vai demorar muito tempo antes que também sejam uma coisa do passado.

Contudo, se os logaritmos perderam seu papel central na matemática computacional, a *função* logarítmica permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada. Ela aparece em uma variedade de aplicações que abrangem a química, biologia, psicologia, arte e música. De fato, um artista contemporâneo, M. C. Escher, tem feito da função logarítmica — disfarçada como espiral — um tema central da maior parte do seu trabalho (ver p. 180).

ooo

Em uma segunda edição da tradução de Edward Wright para a *Descriptio* de Napier (Londres, 1618), em um apêndice, provavelmente escrito por Oughtred, aparece o equivalente da declaração de que $\log_s 10$ =2,302585-[12] Este parece ser o primeiro reconhecimento explícito do papel do número *e* na matemática. Mas de onde veio este número? Onde está sua importância? Para responder a estas questões, primeiro precisamos nos voltar para um assunto que, a princípio, parece muito distante dos expoentes e logaritmos: a matemática financeira.

NOTAS E FONTES

1. Citado por Eric Temple Bell em *Men of Mathematics* (1937; reeditado por Harmondsworth: Penguin Books, 1965), 2:580; Edward Kasner e James Newman, em *Mathematics and the Imagination* (Nova York: Simon and Schustcr, 1958), p.81. O original aparece na *Description ofhis Life and Times* de Lilly (1715)-
2. Ver George *A.* Gibson em "Napier Logarithms and the Change to Briggs Logarithms", em *Napier Tercentenary Memorial Volume,* ed, Cargill Gilston Knott (Londres: Longmans, Green and Company, 1915), p. 111.Ver também JulianLowell Coolidgeem *The Mathematics of GreatAmateurs* (Nova York: Dover, 1963), Capítulo 6, pp. 77-79.
3. Discurso inaugural "A invenção dos logaritmos", em *Napier Tercentenary Memorial Volume,* p. 3.
4. *Handbook of the Napier Tercentenary CeUhration, or Modem Instruments andMethods of Calculation,* editado por E. M. Horsburgh (1914; Los Angeles: Tomash Publishers, 1982), p. 16. A seção A é um relato detalhado da vida de Napier e de seu trabalho.

5. Sobre a questão da primazia, ver Florian Cajori, "Álgebra in Napieris Day and Alleged Prior Inventions of Logarithms", em *Napier Tercentenary Memorial Volume,* p. 93.
6. Joseph Needham, *Science and Civilisation in China* (Cambridge: Cambridge University Press, 195 9), 3:52-53.
7. David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics* (1929; reeditado em Nova York: Dover, 1959), pp. 160-164.
8. Citado em *History of Mathematics,* de David Eugene Smith, 2 volumes (1923; Nova York: Dover, 1958), 1:393.
9. John Aubrey, *BriefLives,* 2:106 (comocitado na*History ofMathematics,* deSmith, 1:393).
10. Citado cm *A Source Book in Mathematics,* de Smith, pp. 156-159.
11. *New York Times,* 3 de janeiro de 1982i
12. Florian Cajori, *A History of Mathematics* (1893), segunda edição (Nova York: Macmillan, 1919), p. 153; Smith, em *History ofMathematics,* 2:517.

Calculando com logaritmos

Para muitos de nós — pelo menos para aqueles que terminaram o segundo grau depois de 1980 — os logaritmos são um assunto teórico, ensinado no curso de introdução à álgebra, como parte do conceito de função. Mas até o final da década de 1970 os logaritmos ainda eram amplamente usados como uma ferramenta de cálculo, virtualmente inalterados desde os logaritmos comuns de Briggs de 1624. O advento das calculadoras de bolso tornou os obsoletos.

Vamos fazer de conta que estamos no ano de 1970 e nos pedem para calcular a expressão

$$x = \sqrt[3]{(493{,}8 . 23{,}67^2/5{,}104)}.$$

Para esta tarefa precisamos de uma tabela de logaritmos comuns, com quatro casas decimais (que ainda pode ser encontrada no final da maioria dos livros de álgebra). Também vamos precisar usar as leis dos logaritmos:

$$\log (ab) = \log a + \log b, \quad \log (a/b) = \log a - \log b,$$
$$\log a^n - n \log a,$$

onde a e b são quaisquer números positivos e n qualquer número real; e aqui "log" significa logaritmo comum — isto é, logaritmo de base 10 —, embora qualquer outra base, para a qual dispuséssemos de tabelas, pudesse ser usada.

Antes de começarmos o cálculo, vamos relembrar a definição de logaritmo. Se um número positivo N for escrito como $N = 104$, então L *é* o logaritmo (base 10) de N, e escrevemos $L = \log N$. Assim as equações $N - 10^L$ *e* $L = \log N$ são equivalentes — elas dão exatamente a mesma informação. E como $1 = 10°$ e $10 = 10^1$, temos $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$. Portanto, logaritmos de qualquer número entre 1 (inclusive) e 10 (exclusive) são frações positivas, isto é, um número da forma 0, *abc.....;* do mesmo modo, o logaritmo de qualquer número entre 10 (inclusive) e 100 (exclusive) é da forma 1, *a b c*...

e assim por diante. Nós resumimos isso como:

Intervalo de N	$\log N$
$1 \leq N < 10$	$0, a\, b\, c \ldots$
$10 \leq N < 100$	$1, a\, b\, c \ldots$
$100 \leq N < 1.000$	$2, a\, b\, c \ldots$

...

(A tabela pode ser estendida para trás, para incluir frações, mas não fizemos isso aqui para manter a discussão simples.) Assim, se um logaritmo for escrito como log N =p, a b c …, o inteiro p nos diz em que escala de potências de 10 se encontra o número N; por exemplo, se nos disserem que log N =3,456 podemos concluir que N fica entre 1.000 e 10.000. O valor exato de N é determinado pela parte fracionária, a b c… do logaritmo. A parte inteira p de log N é chamada de sua característica enquanto que a fracionária, a b c … é a mantissa.[1] Uma tabela de logaritmos geralmente fornece apenas a mantissa e cabe ao usuário determinar a característica.Note que dois logaritmos com a mesma mantissa, mas com características diferentes, correspondem a dois números que possuem os mesmos dígitos mas onde a vírgula decimal ocupa posições diferentes. Por exemplo, log N =0,267 corresponde a N =1,849, enquanto log N =1,267 corresponde a N=18,49. Isto se torna claro se escrevermos essas duas igualdades em forma exponencial: $10^{0,267}$ =1,849 enquanto $10^{1,267}$ =10. $10^{0,267}$ =10. 1,849 =18,49.

Agora estamos prontos para começar nosso cálculo. Começamos escrevendo x de uma forma mais adequada para o cálculo com logaritmos, substituindo o radical por um expoente fracionário:

$x =(493,8.\ 23,67^2/5,104)^{1/3}$

Efetuando os logaritmos em ambos os lados temos

$\log x$-(1/3)[log 493,8+2 log 23,67-log 5,104].

Agora encontramos cada logaritmo usando a seção de Partes

Proporcionais da tabela para somar os valores encontrados lá aos que foram fornecidos na tabela principal. Assim, para encontrar log 493,8 localizamos a fileira que começa com 49 e vamos até a coluna encabeçada pelo 3 (onde encontramos 6928), e depois olhamos sob a coluna 8 na Parte Proporcional para encontrar 7. Somamos este valor a 6928 e obtemos 6935. E como 493,8 encontra-se entre 100 e 1.000, a característica é 2. Assim, temos log 493,8 =2,6935. Fazemos a mesma coisa com os outros números. É conveniente fazer o cálculo em uma tabela:

	N	log N
	23,67 →	1,3742
		× 2
		2,7484
	493,8 →	+ 2,6935
		5,4419
	5,104 →	− 0,7079
		4,7340 : 3
Resposta:	37,84 ←	1,5780

Para o último passo usamos uma tabela de *antilogaritmos* — logaritmos ao contrário. Procuramos o número 0,5780 (a mantissa) e encontramos 3784; e já que a característica de 1,5780 *é* 1, sabemos que o número deve se encontrar entre 10 e 100. Assim x =37,84, arredondando para duas casas.

Partes Proporcionais

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logaritmos com quatro casas decimais

											Partes Proporcionais								
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	.5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logaritmos com quatro casas decimais

Parece complicado? Sim, se você foi mal acostumado pelas calculadoras. Com alguma experiência o cálculo acima pode ser completado em dois ou três minutos. Em uma calculadora não deve levar mais do que alguns segundos (e você obtém a resposta correta em seis decimais 37,845331). Mas não devemos esquecer que desde 1614, o ano em que os logaritmos foram inventados, até 1945, quando o primeiro computador eletrônico tornou-se operacional, os logaritmos — ou o seu equivalente mecânico, a régua de cálculo — eram praticamente o único meio de se fazer tais contas. Não é de admirar que a comunidade científica os tenha adotado com tanto entusiasmo. Como disse o eminente matemático Pierre Simon de Laplace, "ao reduzir suas tarefas, a invenção dos logaritmos dobrou a vida dos astrônomos".

NOTA

1. Os nomes *característica* e *mantissa* foram sugeridos por Henry Briggs em 1624. A palavra *mantissa è* um termo do latim, de origem etrusca, significando contrapeso, um pequeno peso que era colocado na balança para levar o peso até um valor desejado. Ver *History of Mathematics,* de David Eugene Smith, 2 volumes (1923, reeditado em Nova York pela Dover, 1958), 2:514.

3

Questões financeiras

> Se emprestares dinheiro a qualquer um de Meu povo … não deves considerar-te como um credor; nem lhe cobrarás juros.
>
> – *Êxodo* 22:25

Desde épocas imemoriais as questões financeiras têm-se encontrado no centro das preocupações humanas. Nenhum outro aspecto da vida tem uma característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Assim, não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo — ou talvez um mercador, ou um prestamista —, no início do século XVII, tenha notado uma ligação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de uma certa expressão matemática no infinito.

Central em qualquer consideração sobre o dinheiro, encontra-se o conceito de *juros,* ou o valor pago sobre um empréstimo. A prática de cobrar uma taxa sobre o dinheiro emprestado recua até o início da história escrita. De fato, a maior parte da literatura matemática mais antiga que conhecemos lida com questões relativas aos juros. Por exemplo, um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C. e agora encontrado no Louvre, propõe o seguinte problema: quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?[1] Para formular esse problema na linguagem da álgebra, notamos que, no final de cada ano, a soma cresce em 20 por cento, isto é, por um fator de 1,2; daí que, depois de $\boldsymbol{x}$ anos, a soma terá crescido por um fator de $1{,}2^x$. E como isso será igual a duas vezes a soma original, nós temos $1{,}2^x = 2$. (Repare que a soma original não entra na equação.)

Agora devemos resolver esta equaçlo — isto é, remover x do expoente — e precisamos usar logaritmos, que os babilônios não tinham. Entretanto, eles conseguiram achar a solução aproximada observando que $1{,}2^3 = 1{,}728$, enquanto $1{,}2^4 = 2{,}0736$; assim, x devia ter um valor entre 3 e 4. Para reduzir esse intervalo eles usaram um processo conhecido como interpolação linear — encontrando um número que divide o intervalo de 3 para 4 na mesma proporção em que 2 divide o intervalo de 1,728 para 2,0736. Isto leva a uma equação linear (primeiro grau) em x que pode ser resolvida facilmente usando a álgebra elementar. Mas os babilônios também não tinham as nossas técnicas modernas de álgebra e encontrar o valor procurado não foi para eles uma tarefa simples. Ainda assim, sua resposta, $x = 3{,}7870$ encontra-se notavelmente próxima do valor correto, que é 3,8018 (isto é, cerca de três anos, nove meses e dezoito dias). Devemos notar que os babilônios não usavam o nosso sistema decimal, que foi adotado somente no início da Idade Média. Eles usavam o *sistema sexagesimal,* um sistema de numeração baseado no número 60. A resposta no tablete do Louvre é dada como 3;47.13.20, que, no sistema sexagesimal significa $3+47/60+13/60^2+20/60^3$ ou, muito aproximadamente, 3,7870.[2]

Mas, afinal, os babilônios usaram uma tabela de logaritmos de algum tipo. Entre os tabletes de barro que restaram, um deles lista as primeiras dez potências dos números 1/36,1/16,9 e 16 (os dois primeiros expressos no sistema sexagesimal como 0; 1.40 e 0;3.45) — todos quadrados perfeitos. Embora tal tabela liste as potências de um número em vez dos expoentes, ela é, na verdade, uma tabela de antüogaritmos, exceto que os babilônios não usavam uma base padrão para suas potências. Parece que essas tábuas eram criadas para lidar com um problema específico envolvendo juros compostos e não para uso geral.[3]

Vamos olhar rapidamente como funcionam os juros compostos. Suponha que investimos $100 (o "principal") em uma conta que paga 5 por cento de juros compostos anualmente. No final de um ano nosso saldo será 100x1,05 =$105. O banco então considerará esta nova soma como um novo principal que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano o saldo será 105 x 1,05 =$110,25, e no final do terceiro ano 110,25 x 1,05 =$115,76, e assim por diante. (Desse modo, não apenas a soma original recebe juros anuais, mas também *juros* sobre o principal — daí a expressão “juros compostos”.) Percebemos que nosso saldo cresce numa progressão geométrica, com a taxa comum de 1,05. Por contraste, em uma conta que paguz*juros simples,* a taxa anual é aplicada sobre a soma *original,* sendo, portanto, a mesma a cada ano. Se tivessemos investido nossos $100 a juros simples, de cinco por cento, o saldo aumentaria a cada ano de $5 dando-nos uma progressão aritmética 100, 105, 110, 115 e assim por diante. Claramente o dinheiro investido a juros compostos — não importando qual seja a taxa — vai, após certo tempo, crescer mais rápido do que se for investido a juros simples.

A partir deste exemplo podemos ver o que acontece no caso geral. Suponha que investimos um principal de P dólares em uma conta que paga r por cento de taxa de juros compostos anualmente. (Nos cálculos nós sempre exprimimos r como um decimal, por exemplo 0,05 em vez de 5 por cento.) Isto significa que, no final do primeiro ano, nosso saldo será $P(1+r)$, e no final do segundo ano, $P(1+r)^2$, e assim por diante até que depois de t anos nosso saldo será $P(1+r)^t$. Chamando esta soma de S, chegamos à fórmula

$$S = P(1+r)^t \quad (1)$$

Esta fórmula é a base para virtualmente todos os cálculos financeiros, aplicando-se a contas bancárias, empréstimos, hipotecas e anuidades.

Alguns bancos calculam o juro acumulado não uma vez, mas várias vezes por ano. Se, por exemplo, uma taxa de juros anual de 5 por cento é composta semestralmente, o banco usará metade da taxa de juros anual como taxa *por período*. Daí que, num ano, um principal de $100 será composto duas vezes, cada vez a uma taxa de 2,5 por cento. Assim, teremos 100 x $1{,}025^2$ ou $105,0625, cerca de seis centavos a mais do que o mesmo dinheiro renderia se fosse composto anualmente a cinco por cento.

Na comunidade bancária podemos encontrar todos os tipos de composição de juros — anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário. Suponha que a composição é feita n vezes ao ano. Para cada “período de conversão” o banco usa a taxa de juros anual *dividida por n,* que é r/n. E como em t anos existem (nt) períodos de conversão, um principal P, após t anos renderá

$S = P(1+r/n)^{nt}$ (2)

É claro que a equação 1 é apenas um caso especial da equação 2, o caso onde $n = 1$.

Será interessante comparar a quantidade de dinheiro que um determinado principal irá render depois de um ano para diferentes períodos de conversão, usando-se a mesma taxa de juros anual. Vamos tomar como exemplo P=$100 e r =5 por cento =0,05. Aqui uma calculadora de bolso será útil. Se a calculadora tiver uma tecla exponencial (geralmente denotada por y^x), poderemos usá-la para calcular os valores desejados diretamente; do contrário teremos que usar multiplicações repetidas por um fator de (1+0,05/n). Os resultados, mostrados na tabela 3.1, são bem surpreendentes. Como vemos uma soma de $100 composta diariamente rende exatamente treze centavos a mais do que quando composta anualmente e cerca de *um centavo* a mais do que quando composta mensalmente ou semanalmente! Quase não faz diferença em que conta investimos o nosso dinheiro.[4]

TABELA 3.1. $100 investidos durante um ano a uma taxa anual de juros de 5 por cento em diferentes períodos de conversão

Período de conversão	*n*	*r/n*	*S*
Anual	1	0,05	$105,00
Semestral	2	0,025	$ 105,06
Trimestral	4	0,0125	$105,09
Mensal	12	0,004166	$105,12
Semanal	52	0,0009615	$105,12
Diário	365	0,0001370	$105,13

Para explorar ainda mais esta questão, vamos considerar um caso especial da equação 2, quando $r = 1$. Isto significa uma taxa anual de juros de 100 por cento e certamente nenhum banco jamais alcançou tão generosa oferta. Mas o que temos em mente não é uma situação real e sim um caso hipotético, que tenha profundas sequências matemáticas. Para simplificar nossa discussão vamos assumir que P =$1 *e* t =1 ano. A equação 2 então se torna

$$S = (1+1/n)^n$$

e nosso objetivo agora é investigar o comportamento desta fórmula para valores crescentes de *n*. Os resultados são dados na tabela 3.2

TABELA 3.2

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Parece que qualquer aumento posterior em *n* quase não afetará o resultado — as mudanças acontecerão em digitos cada vez menos significativos.

Mas será que esse padrão continua? É possível que, não importa o quão elevado seja *n,* os valores de $(1+1/n)^n$ estacionem nalgum ponto em torno de 2,71828? Esta intrigante possibilidade foi de fato confirmada por uma cuidadosa análise matemática (ver o Apêndice 2). Não sabemos quem primeiro notou o comportamento peculiar da expressão $(1+1/n)^n$ à medida que *n* tende ao infinito, por isso, a data exata do nascimento do número que mais tarde seria denotado por *e* permanece obscura. Parece provável, no entanto, que suas origens recuem até o início do século XVII, por volta da época em que Napier inventou os logaritmos. (Como vimos, a segunda edição da tradução de Edward Wright do *Descriptio* de Napier (1618) continha uma referência indireta ao *e.)* Aquele período foi marcado por um enorme crescimento do comércio internacional e as transações financeiras de todos os tipos proliferaram. Em conseqüência, um bocado de atenção foi dada à lei dos juros compostos, e é possível que o número *e* tenha sido reconhecido pela primeira vez nesse contexto. Mas logo veremos que questões não relacionadas aos juros compostos também levaram ao mesmo número na mesma época. Mas antes de nos voltarmos para essas questões seria bom dar uma atenção mais detalhada ao processo matemático que se encontra na base do *e:* o processo do limite.

NOTAS E FONTES

1. Howard Eve, em *An Introduction to the History ofMathematics* (reimpresso em 1964 na Filadélfia: Saunders Coilege Publishing, 1983), p. 36.
2. CarlB. Boyer, *A History of Mathematics,* edição revisada (Nova York; John Wiley, 1989), p. 36.
3. Idem, p. 35.
4. É claro que a diferença ainda é proporcional ao principal. Se investirmos $1.000.000 em vez de $100, nosso saldo no final do primeiro ano será $1.050.000 se composto anualmente, comparado com $1.051.267,50 se composto diariamente — uma diferença de $1.267,50. Você sempre se sai melhor se for rico!

4

Ao limite, se ele existe

Eu vi, como alguém pode testemunhar o trânsito de Vênus, uma quantidade passando através do infinito e mudando o seu sinal de mais para menos. Eu vi exatamente como aconteceu … mas foi depois do jantar e eu me esqueci.

– SIR WINSTON CHURCHILL, *My Early Life* (1930)

Em uma primeira observação o comportamento peculiar da expressão $(1+1/n)^n$ para valores grandes de n deve parecer de fato intrigante. Suponha que consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses, $1+1/n$. À medida que n aumenta, $1/n$ fica cada vez mais próximo de 0 e assim 1+l/n fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor de n "realmente grande" (seja lá o que for "realmente grande"), 1+l/n, para todos os propósitos e funções pode ser substituído por 1. Agora 1 elevado a qualquer potência *é* sempre igual a 1, portanto parece que $(1+1/n)^n$ para valores grandes de n deve se aproximar do número 1. Se fosse esse o caso, não teriamos mais nada a dizer sobre o assunto.

Mas suponha que seguíssemos uma abordagem diferente. Nós sabemos que, quando um número maior que 1 *é* elevado a potências crescentes, o resultado se torna cada vez maior. E como $1+1/n$ *é* sempre maior do que 1, podemos concluir que $(1+1/n)^n$, para valores maiores de n vai crescer sem limites, isto é, tenderá ao infinito. Novamente, isto seria o fim da história.

Que esse tipo de raciocínio apresenta um erro sério, pode ser deduzido do fato de que, dependendo de nossa abordagem, vamos chegar a dois resultados diferentes: 1 no primeiro caso e o infinito no segundo. Em matemática o resultado final de qualquer operação numérica *válida,* não importa como seja obtido, deve ser sempre o mesmo. Por exemplo, nós podemos calcular a expressão 2. (3+4) somando primeiro 3 e 4 para obter sete e então dobrando o resultado, ou primeiro dobrando cada um dos números, o 3 e o 4, e a seguir somando os resultados. Em ambos os casos obtemos 14. Por que então obtivemos resultados diferentes para $(1+1/n)^n$?

A resposta encontra-se na palavra *válida.* Quando calculamos a expressão 2. (3+4) pelo segundo método, tacitamente usamos uma das leis fundamentais da aritmética, a lei distributiva que diz que, para quaisquer três números *x, y* e *z,* a equação $x \,.\, (y + z) = x - y + x \,.\, z$ *é* sempre verdadeira. Passar do lado esquerdo dessa equação para o lado direito *é* uma operação válida. Um exemplo de operação inválida é escrever √ (9+16) =3+4 =7, um erro que estudantes de álgebra freqüentemente cometem no início. A razão é que tirar a raiz quadrada não é uma operação distributiva; de fato, o único meio certo de calcular √ (9+16) é somar *primeiro os* números sob o sinal de raiz e *então* tirar a raiz quadrada: √ (9+16) =√ 25 =5. A maneira como lidamos com a expressão $(1+1/n)^n$ foi igualmente inválida porque jogamos de modo errado com um dos conceitos mais fundamentais da análise matemática: o conceito de *limite.*

Quando dizemos que uma seqüência de números $a_{1,}$ $a_2,$ $a_3,$ …, a_n… tende para um limite *L* à medida que *n* tende para o infinito, queremos dizer que, enquanto *n* se torna cada vez maior, os termos da seqüência ficam cada vez mais próximos do número *L.* Em outras palavras, podemos fazer a diferença (em valor absoluto) entre *a* e *L* tão pequena quanto quisermos avançando o suficiente na seqüência — isto é, escolhendo um valor de *n* suficientemente grande. Vejamos, por exemplo, a seqüência 1, 1/2, 1/3, 1/4, …, cujo termo geral é *a* =1/*n.* À medida que *n* aumenta, o resultado fica cada vez mais próximo de 0. Isto significa que adiferença entre 1/*n* e o limite 0 (isto é, apenas 1/*n)* pode tornar-se tão pequena quanto quisermos, se escolhermos um valor de *n* suficientemente grande. Por exemplo, se quisermos que 1/*n* seja menor do que 1/1.000, tudo o que temos que fazer é tornar *n maior* do que 1.000. Se quisermos que 1/*n* seja menor do que 1/1.000.000, simplesmente escolhemos qualquer valor de *n* maior do que

1.000.000, e assim por diante. Nós expressamos esta situação dizendo que $1/n$ tende a 0 à medida que n aumenta sem restrições, e escrevemos $1/n \to 0$ à medida que $n \to \infty$. Também podemos usar a notação abreviada

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mas aqui é necessária uma palavra de cautela. A expressão $\lim_{n\to\infty}$ é $1/n = 0$ diz apenas que o *limite* de $1/n$ à medida que $n \to \infty$ é 0; ela não quer dizer que $1/n$ será igual a 0 — de fato não vai ser. Esta é a própria essência do conceito de limite: uma seqüência de números pode se *aproximar* de um limite o quanto quisermos, mas nunca vai chegar até ele realmente.[1]

Para a seqüência l/n o resultado do processo de limite é bem previsível. Em muitos casos, entretanto, não fica imediatamente claro qual será o valor limitante ou se existe realmente um limite. Por exemplo, a seqüência $a_n = (2n+1)/(3n+4)$ cujos termos para $n = 1, 2, 3, \ldots$ são 3/7, 5/10, 7/13, …., tende ao limite 2/3 quando $n \to \infty$. Isto pode ser percebido dividindo-se o numerador e o denominador por n, dando-nos a expressão equivalente $a_n = (2+1/n)/(3+4/n)$. Conforme $n \to \infty$, ambos, $1/n$ e $4/n$, tendem a 0, de modo que toda a expressão tende a 2/3. Por outro lado a seqüência $a_n = (2n^2+1)/(3n+4)$, cujos membros são 3/7, 9/10, 19/13, …, cresce sem limites enquanto $n \to \infty$. Isso acontece porque o termo n^2 faz o numerador crescer a taxa mais rápida qué o denominador. Nós exprimimos este fato escrevendo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, embora na verdade esta seqüência não tenha um limite. O limite, se existe, deve ser um número real definido e o infinito não é um número real.

Durante séculos os matemáticos e os filósofos têm ficado intrigados com o conceito de infinito. Existirá um número maior do que todos os outros? E se existir, de que tamanho será esse "número"? E numa escala pequena, poderíamos dividir uma quantidade — digamos um número ou o segmento de uma linha — em quantidades cada vez menores, ou será que eventualmente chegaremos a um ponto indivisível, um átomo matemático que nao possa mais ser partido? Essas questões perturbaram os filósofos da Grécia antiga, há mais de dois mil anos, e ainda nos incomodam hoje — ver, por exemplo, a busca interminável pelas partículas elementares, aqueles fugidios tijolos a partir dos quais, acredita-se, toda a matéria é formada.

O fato de não podermos usar o símbolo do infinito, ∞, como um número qualquer deve ficar claro a partir dos modelos dados acima. Por exemplo, se colocarmos $n = \infty$ na expressão $(2n+1)/(3n+4)$ obteremos $(2^{\infty}+1)/(3^{\infty}+4)$. Como um múltiplo de ∞ ainda é ∞ e um número somado a ∞ contínua sendo ∞, obteríamos $^{\circ\circ}/^{\circ\circ}$. Se ∞ fosse um número qualquer, sujeito às leis da aritmética, esta expressão seria simplesmente igual a 1. Mas *não é* igual a 1, é igual a 2/3 como já vimos. Uma situação semelhante surge quando tentamos "calcular" $\infty - \infty$. Seria tentador dizer que, uma vez que qualquer número quando subtraído de si mesmo dá 0, teríamos $\infty - \infty = 0$. Que isso pode ser falso podemos ver na expressão $1/x^2 - [(\cos x)/x]^2$, quando cos é a função cosseno estudada na trigonometria. À medida que $x \to \infty$, cada um dos dois termos tende ao infinito; e no entanto, com a ajuda de um pouco de trigo nometria, podemos mostrar que a expressão se aproxima de 1.

Expressões como ∞/∞ ou $\infty - \infty$ são conhecidas como "indeterminações". Estas expressões não possuem um valor predeterminado; elas só podem ser avaliadas através de um processo de limite. Falando de um modo mais mundano, em cada indeterminação existe uma "luta" entre duas quantidades, uma tendendo a tornar a expressão numericamente grande e a outra tendendo a torná-la numericamente pequena. O resultado final vai depender do limite. As indeterminações mais comuns encontradas em matemática são: $0/0$, ∞/∞, $0.\ \infty$, $\infty - \infty$, 0°, ∞° e 1^{∞}. É a esta última forma que pertence o $(1+1/n)^n$.

Em uma indeterminação, somente a manipulação algébrica pode não ser suficiente para determinar o resultado final do processo de limite. É claro que poderíamos usar um computador ou uma calculadora para avaliar as expressões para valores muito grandes de *n,* digamos um milhão ou um bilhão. Mas tais cálculos só poderiam *sugerir* o valor limite. Não teremos nenhuma garantia de que tal valor iria se manter para um *n* ainda maior. Esta situação revela a diferença fundamental que existe entre a matemática e as ciências baseadas em evidências experimentais ou observacionais, tais como a física e a astronomia. Nessas ciências se um certo resultado — digamos uma relação numérica entre a temperatura de uma determinada quantidade de gás e sua pressão — for apoiado por um grande número de experiências, esse resultado poderá ser considerado como uma lei da natureza.

Um exemplo clássico é fornecido pela lei da gravitação universal, descoberta por Isaac Newton e enunciada em sua grande obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). A lei diz que quaisquer corpos materiais — sejam eies o sol e um planeta girando ao seu redor, ou dois clipes de papel colocados sobre uma mesa — exercem um sobre o outro uma força gravitacional proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles (mais precisamente entre seus centros de massa). Durante mais de dois séculos esta lei foi uma das fundações da física clássica, todas as observações astronômicas pareciam confirmá-la e ela ainda é a base para o cálculo das órbitas dos planetas e dos satélites. Somente em 1916 a lei da gravitação de Newton foi substituída por uma lei mais refinada, a teoria geral da relatividade de Einstein. (A lei de Einstein difere da de Newton somente no caso de massas extremamente grandes e em velocidades próximas da velocidade da luz.) E no entanto não existe meio de se provar a lei de Newton ou qualquer outra lei da física no sentido matemático da palavra. Uma prova *matemática é* uma corrente de deduções lógicas, todas derivando de um pequeno número de pressupostos iniciais ("axiomas") e sujeitas às regras estritas da lógica matemática. Apenas tal corrente de deduções pode estabelecer a validade de uma lei matemática, um *teorema.* E a menos que este processo possa ser realizado satisfatoriamente, nenhuma relação — não importa com que freqüência tenha sido confirmada pela observação — pode se tornar uma lei. Ela pode adquirir a condição de *hipótese* ou *conjectura* e todos os tipos de resultados experimentais poderão ser derivados dela, mas nenhum matemático jamais irá basear nela conclusões definitivas.

Como vimos no capítulo anterior, a expressão $(1+1/n)^n$ para valores muito grandes de n parece aproximar-se do número 2,71828 como um limite. Mas para determinar esse limite com alguma certeza — ou mesmo provar que o limite existe em primeiro lugar — nós devemos usar outros métodos que não o cálculo de valores individuais. (Além disso, torna-se cada vez mais difícil calcular a expressão para valores muito grandes de n — precisaríamos usar logaritmos para fazer a exponenciaçlo). Felizmente tal método existe e usa a *fórmula binomial.*

Um binômio é qualquer expressão que consiste na soma de duas variáveis. Nós podemos escrever tal expressão como $a+b$. Uma das primeiras coisas que aprendemos na álgebra elementar é como calcular as potências sucessivas de um binômio. Como expandir a expressão $(a+b)^n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= a+b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

Desses poucos exemplos podemos ver, facilmente, que o padrão geral da expansão de $(a+b)^n$ consiste em $n+1$ termos, cada um deles na forma onde $a^{n-k}b^k$, onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Daí que se formos da esquerda para a direita o expoente de a diminui de n para 0 (podemos escrever o último termo como $a^0 b^n$), enquanto o expoente de b aumenta do 0 para n. Os coeficientes dos vários termos, conhecidos como *coeficientes binomiais,* formam um esquema triangular

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1\\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

Este esquema *é* conhecido como *triângulo de Pascal,* em homenagem ao filósofo e matemático francês Blaise Pascal (1623-1662), que o utilizou em sua teoria da probabilidade (o esquema já era conhecido há muito mais tempo, ver as figuras 2, 3 e 4). Neste triângulo cada número é a soma dos dois números imediatamente à esquerda e à direita *na fileira acima do número.* Por exemplo, os números na quinta fileira, 1, 4, 6, 4, 1 são obtidos dos que se encontram na quarta linha como se segue:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

(Note que os coeficientes são os mesmos não importando se começamos da esquerda ou da direita).

Figura 2. O triângulo de Pascal aparece na folha de rosto de um trabalho sobre aritmética de autoria de Petrus Apianus (Ingolstadt, 1527)..

Mas existe uma desvantagem em usarmos o triângulo de Pascal para encontrar os coeficientes binomiais: primeiro precisamos calcular todas as fileiras acima da que nos interessa, um processo que consome cada vez mais tempo à medida que *n* aumenta. Felizmente existe uma fórmula que permite encontrar esses coeficientes sem depender do triângulo de Pascal. Se chamarmos o coeficiente do termo $a^{n-k}\, b^k$ *de* $^nC^k$, então

$$^{n}C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

O símbolo *n\ é* chamado de *fatorial de n,* e indica o produto de 1. 2. 3. …. *n*. Os primeiros valores de *n*! são: l! =l,2! =1.2 =2,3! =1.2.3 =6 e 4! =1.2.3.4 =24 (também definimos 0! como sendo 1). Se, por exemplo, aplicarmos esta fórmula à expansão de $(a+b)^4$ obteremos os coeficientes $^4C_0$ =4!/(0!.4!) =1,$^4C_1$ =4!/(l!. 3!) =1. 2. 3. 4/(1.2.3) =4,$^4C_2$ =4!/(2!. 2!) =6,$^4C_3$ =4!/(3!. 1!) =4, e $^4C_4$ =4!/(4!. 0!) =1, os mesmos números que aparecem na quinta fileira do triângulo de Pascal.

Figura 3. O triângulo de Pascal em uma obra japonesa de 1781.

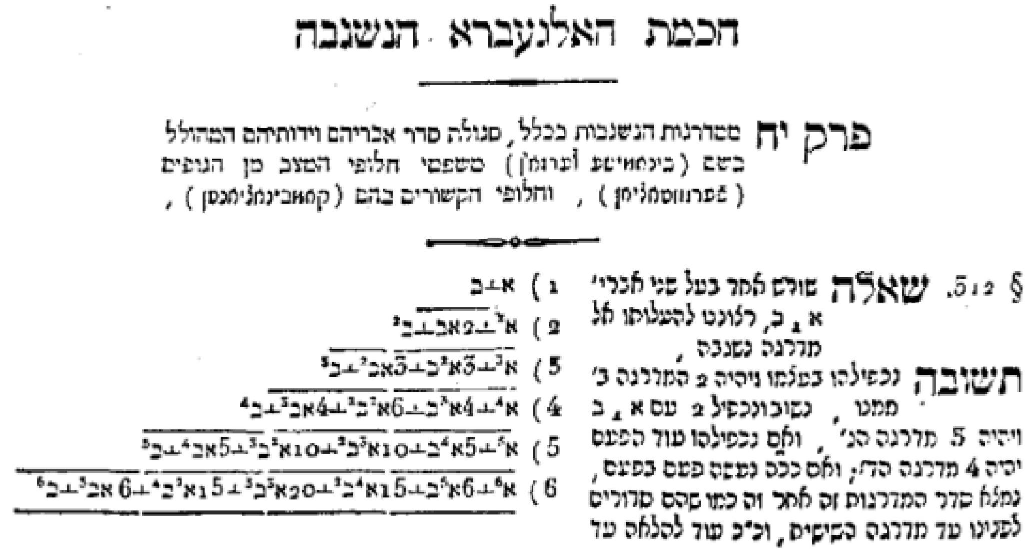


Figura 4. A expansão de $(a + b)^n$ para $n = 1, 2, 3, ..., 6$, de um livro hebraico de álgebra de autoria de Hayim Selig Slonimski (Vilnius, 1834). As fórmulas usam letras hebraicas e são lidas da direita para a esquerda.

A fórmula binomial pode ser facilmente demonstrada para todos os valores de n inteiros positivos através de um processo conhecido como indução matemática. Nós demonstramos que se a fórmula for verdadeira para todos os valores de n até, digamos, m, então ela também deve ser verdadeira para $n = m+1$ [é claro que ela é verdadeira para $n = 1$, já que $(a+b)^1 = a+b$]. Notamos que a expansão de $(a+b)^n$ chega ao seu final exatamente em $n+1$

termos. Como veremos no Capítulo 8, uma das primeiras grandes realizações de Isaac Newton foi estender essa fórmula para o caso onde n é um inteiro negativo ou mesmo uma fração. Nesses casos a expansão envolverá um número infinito de termos.

Uma rápida olhada na equação 1 mostrará que podemos escrevê-la de uma forma alternativa,

$$ {}^{n}C_{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1)}{k!}. \tag{2} $$

Isto é porque $n! = 1 .\ 2 .\ 3 .\ \ldots .\ n$ enquanto $(n-k)! = 1 .\ 2 .\ 3 .\ \ldots .\ (n-k)$, de modo que todos os fatores de 1 a $(n-k)$ no numerador da equação 1 cancelam aqueles no denominador, deixando apenas os fatores $n .\ (n-1) .\ (n-2) .\ \ldots .\ (n-k+1)$. Tendo em mente a equação 2 agora podemos aplicar a fórmula binomial à expressão $(1+1/n)^n$. Teremos $a = 1$ e $b = 1/n$, de modo que

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 $$

$$ + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^n. $$

Depois de uma ligeira manipulação isto se torna

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{1}{n^n}. \tag{3} $$

Como estamos procurando pelo *limite* de $(1+1/n)^n$ quando $n \to \infty$, devemos deixá-lo aumentar sem restrições. Nossa expansão, assim, terá mais e mais termos. Ao mesmo tempo, a expressão dentro de cada par de parênteses vai tender a 1, porque os limites de $1/n$, $2/n$, … à medida que $n \to \infty$ são todos 0. Assim, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots \quad (4)$$

Devemos acrescentar que mesmo esta derivação não é de todo suficiente para provar que o limite desejado realmente existe (uma demonstração completa pode ser encontrada no Apêndice 2). Mas por ora vamos aceitar a existência deste limite como um fato. Vamos denotar o limite pela letra *e* (mais sobre a escolha desta letra será explicado depois), assim teremos:

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \quad (5)$$

Não somente é muito mais fácil calcular os termos desta *série infinita* e acrescentar tantos quanto quisermos, como a soma vai se aproximar do valor limite muito mais rápido do que se calcularmos $(1+1/n)^n$ diretamente. As primeiras sete somas parciais de nossa série são:

2 =	2
2 + 1/2 =	2,5
2 + 1/2 + 1/6 =	2,666 ...
2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 =	2,708333 ...
2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 =	2,716666 ...
2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 =	2,7180555 ...
2 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5.040 =	2,718253968 ...

Vemos que os termos de cada soma diminuem rapidamente (isto acontece devido ao rápido crescimento de $k!$ no denominador de cada termo), de modo que as séries convergem com muita rapidez. Além disso, como todos os termos são positivos, a convergência é *monótona.* Cada termo adicional nos leva mais perto do limite (isto não acontece com uma série cujos termos tenham sinais alternados). Estes fatos desempenham um papel na prova da existência de $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$. Por enquanto vamos aceitar que *e* tem um valor aproximado de 2,71828 e que esta aproximação pode ser melhorada acrescentando mais e mais termos à série, até chegarmos à precisão desejada.

NOTA

1. Aqui excluímos o caso trivial em que todos os termos da seqüência são iguais ou onde artificialmente inserimos o valor do limite como um dos membros da seqüência. A definição de limite, *é* claro, será verdadeira também para esses casos.

Alguns números curiosos relacionados com o *e*

e-^{e} =0,065988036 …

Leonhard Euler provou que a expressão x^{xxxx}, quando o número de expoentes cresce infinitamente, tende a um limite se x estiver entre

e-^{e} (=1/e-^{e}) e e^{ue}.1

$e^{-\pi/2}$ =0,207879576 …

Como Euler mostrou em 1746, a expressão $i^{\cdot i}$ (onde i =√-1) tem infinitos valores, todos eles reais: $i^{\cdot i}$ =$e^{-\pi/2+2k\ \pi}$, onde k =0, ± 1, ± 2, … O valor principal destas (o valor para k =0) *é* $e^{-\pi/2}$.

l/e =0,367879441 …

O limite de $(1\text{-}l/n)^{n}$ quando $n \to \infty$. Este número *é* usado para medir a taxa de decaimento da função exponencial y =e^{-at}. Quando t =1/a, teremos y =e^{-1} =1/e. Ele também aparece no problema do "envelope errado" proposto por Nicolaus Bernoulli: se n cartas forem colocadas em n envelopes com endereços diferentes, qual é a probabilidade de que cada carta seja colocada em um envelope errado? Quando $n \to \infty$, a probabilidade se aproxima de 1/e.[2]

$e^{1/e}$ =1,444667861…

A solução do problema de Jakob Steiner: Encontre o valor máximo obtido pela função y =$x^{1/x}$ =^{x} √x. Este valor é obtido quando x =$e^{\cdot 3}$

878/323 =2,718266254…

A melhor aproximação racional de e usando inteiros abaixo de 1.000.[4] É fácil memorizar e é reminiscente da aproximação racional 355/113 =3,14159292 … para π.

e =2,718281828 …

A base dos logaritmos naturais (também conhecidos como logaritmos neperianos, embora sem justificação histórica) e o limite de $(1+1/n)^n$ quando $n \to \infty$. O bloco repetido de dígitos 1828 é enganador, pois *e* é um número irracional e representado por uma seqüência infindável de decimais que não se repete. A irracionalidade de *e* foi provada em 1737 por Euler. Charles Hermite em 1873 provou que *e* é um número transcendental; isto é, não pode ser uma solução para uma equação polinomial com coeficientes inteiros.

O número *e* pode ser interpretado geometricamente de vários modos. A área sob o gráfico de $y = e^x$ de $x = -\infty$ a $x = 1$ é igual a *e,* assim como o declive do mesmo gráfico em $x = 1$. A área sob a hipérbole $y = 1/x$ de $x = 1$ a $x = e$ é igual a 1.

$e + \pi = 5{,}859874482 \ldots$

$e . \pi = 8{,}539734223 \ldots$

Estes números raramente aparecem em aplicações e não se sabe se eles são algébricos ou transcendentais.[5]

$e^e = 15{,}15426224 \ldots$

Não se sabe se este número é algébrico ou transcendental.[6]

$\pi^e = 22{,}45915772 \ldots$

Não se sabe se este número é algébrico ou transcendental.[7]

$e^\pi = 23{,}14069263 \ldots$

Alexandr Gelfond provou em 1934 que este número é transcendental.[8]

$e^{e^e} = 3.814.279{,}104 \ldots$

Note como este número é muito maior do que e^e. O número seguinte nesta progressão, $e^{e^{e^e}}$ tem 1.656.521 dígitos em sua parte inteira.

ooo

Dois outros números relacionados com o *e* são:

$\gamma = 0{,}577215664 \ldots$

Este número, indicado pela letra grega gama, é conhecido como constante de Euler. Ele é o limite de 1+1/1+1/2+1/3+1/4+… 1/*n*-ln *n* quando —> Em 1781 Euler calculou este número com dezesseis casas deci

mais, O fato de que o limite existe significa que embora a série 1+1/2+l / 3 +1 / 4 +…+l/«(conhecida como série harmônica) cresça ilimitadamente à medida que $n \to \infty$, a diferença entre ela e ln *n se* aproxima de um valor constante. Não se sabe se γ é um número algébrico ou transcendental e nem mesmo se é racional ou irracional.[9]

ln 2 =0,693147181 …

Esta é a soma da série harmônica com sinais alternados, 1 - 1 / 2 + 1/3-1/4+-…, obtida da série de Nicolaus Mercator ln $(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 - \ldots$ colocando-se $x = 1$. Este é o número ao qual *e* deve ser elevado para conseguirmos resultado 2: $e^{0,693147481\ldots} = 2$.

NOTAS E FONTES

1. David Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (Harmondsworth: Penguin Books, 1986), p. 35.
2. Idem, p. 27. Ver também 100 *Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution, de Heinrich Dörrie*, tradução de David Antin (Nova York, Dover, 1965), pp-19-21.
3. Dörrie, *100 Great Problems*, p. 359
4. Wells, *Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, p. 46.
5. George F. Simmons, *Calculus and Analytic Geometry* (Nova York: McGraw-Hill, 1985), p. 737.
6. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics,* ed. revisada (Nova York; John Wiley, 1989), p. 687.
7. Idem.
8. Idem.
9. Wells, *Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, p. 28.

5

Os precursores do cálculo

Se eu vi mais (do que você e Descartes), é porque me coloquei sobre os ombros de gigantes.

– SIR ISAAC NEWTON para Robert Hooke.

As grandes invenções geralmente se encaixam em duas categorias: algumas são o produto da mente criativa de uma única pessoa, caindo sobre o mundo subitamente como um relâmpago num dia claro; outras — que formam um grupo bem maior — são o produto final de uma longa evolução de idéias que fermentaram dentro de muitas mentes, ao longo de décadas, quando não séculos. A invenção dos logaritmos pertence ao primeiro grupo, a do cálculo ao segundo.

Geralmente se diz que o cálculo foi inventado por Isaac Newton (1642-1727) e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante a década de 1665-1675, mas isso não é inteiramente verdadeiro. A idéia central por trás do cálculo — de usar o processo de limite para derivar resultados sobre objetos comuns, finitos — recua até a época dos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (cerca de 287-212 a.C.), o lendário cientista cuja inventividade militar teria desafiado os invasores romanos de sua cidade durante mais de três anos, teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limite para calcular a área e o volume de várias formas planas e sólidas. Por motivos que logo veremos ele nunca usou o termo *limite,* mas era isso, precisamente, o que tinha em mente.

A geometria elementar nos permite calcular o perímetro e a área de qualquer triângulo e, a partir daí, de qualquer polígono (uma forma plana fechada composta por segmentos de retas). Mas quando topamos com formas curvas, a geometria elementar se torna inútil. Tome como exemplo o círculo.

No início do estudo da geometria aprendemos que a circunferência e a área de um círculo são dadas por fórmulas simples como $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, respectivamente. Mas a aparente simplicidade dessas fórmulas *é* enganosa, pois a constante π aparecendo nelas — a relação entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro — constitui um dos números mais intrigantes da matemática. Sua natureza só foi completamente estabelecida no século XIX, e mesmo hoje algumas questões sobre este número continuam sem resposta.

O *valor* de π é conhecido com extraordinária precisão há muito tempo. Um texto egípcio datado de 1650 a.C., o papiro Rhind (o nome vem do egiptólogo escocês A. Henry Rhind, que o obteve em 1858), traz a declaração de que um círculo contém a mesma área de um quadrado cujo lado tenha 8/9 do diâmetro do círculo (fig. 5). Se chamarmos o diâmetro de d, a declaração se traduz na equação $\pi (d/2)^2 = [(8/9)d]^2$, da qual obtemos, depois de cancelar d^2, $\pi/4 = 64/81$, ou $\pi = 256/81 = 3{,}16049$.[1] O erro deste resultado é de 0,6 por cento do valor verdadeiro de π (3,14159, aproximado para cinco casas decimais) — extraordinariamente preciso para um texto escrito há 4 mil anos![2]

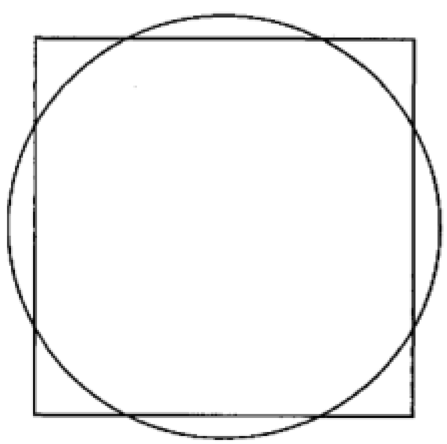


Figura 5- De acordo com o papiro Rhind (cerca de 1650 a.C.), um circulo tem a mesma área de um quadrado cujo lado possui 8/9 do diâmetro do circulo.

Através dos séculos muitos valores foram atribuídos a π. Mas até a época dos gregos todos esses valores eram essencialmente empíricos: eram obtidos medindo-se realmente a circunferência de um círculo e dividindo-a por seu diâmetro. Foi Arquimedes quem primeiro propôs um método capaz de fornecer o valor de π com qualquer precisão desejada através de um *procedimento matemático* — um algoritmo, em lugar de uma medição.

A idéia de Arquimedes era obter um círculo e nele inscrever uma série de polígonos regulares, com um número cada vez maior de lados. (Em um polígono regular todos os lados possuem o mesmo comprimento e todos os ângulos têm a mesma medida.) Cada polígono tem um perímetro ligeiramente menor do que a circunferência, mas conforme aumentamos o número de lados dos polígonos eles se aproximam cada vez mais do círculo (fig. 6). Encontrando o perímetro de cada polígono e dividindo-o pelo diâmetro vamos obter uma aproximação de π, e esta aproximação pode ser melhorada simplesmente aumentando-se o número de lados. Mas, como todos os polígonos inscritos se aproximam do círculo por dentro, essas aproximações vão ser sempre um pouco menores do que o verdadeiro valor de π. Arquimedes, portanto, repetiu o processo com polígonos *circunscritos* (fig. 7), obtendo uma série de aproximações que excediam a π. Para qualquer número de lados, o valor verdadeiro de π ficava "espremido" entre as cotas superior e inferior. E ao aumentar o número de lados podemos tornar o intervalo entre as cotas tão pequeno quanto quisermos, como as mandíbulas de um torno fechando-se mutuamente. Usando polígonos incritos e circunscritos de noventa e seis lados (os quais obtemos começando com um hexágono regular e dobrando o número de lados), Arquimedes estimou que o valor de π estava situado entre 3,14103 e 3,14271 — uma aproximação que ainda hoje é suficiente para a maioria das aplicações.[3] Se pudéssemos envolver o equador de um globo de 12 polegadas de diâmetro com um polígono de 96 lados, os lados quase não seriam perceptíveis sobre a superfície lisa do globo.

A realização de Arquimedes foi um marco na história da matemática, mas ele não se limitou a ela. Estava igualmente interessado em outra figura comum, a parábola — aproximadamente, a curva descrita por uma pedra lançada no ar (a trajetória só seria uma parábola exata se não existisse ar para resistir ao movimento). A parábola aparece em uma série de aplicações. As grandes antenas asadas nas comunicações modernas possuem uma seção parabólica, tal como os refletores prateados nos faróis dos automóveis. O interesse de Arquimedes pela parábola parece derivar de uma certa propriedade dessa curva: sua habilidade para refletir os raios vindos do infinito concentrando-os em um único ponto, o *foco* (palavra que vem do latim e significa "o lugar do fogo"). Dizem que ele teria construído enormes espelhos parabólicos, apontando-os para a frota romana que cercava sua cidade, de modo que os raios do sol, convergindo no foco de cada parábola, incendiassem os navios inimigos.

Arquimedes também investigou os aspectos mais teóricos da parábola, em especial como encontrar a área de um setor parabólico. Ele resolveu este problema dividindo o setor em uma série de triângulos cujas áreas diminuem em uma progressão geométrica (fig. 8). Continuando com esta progressão ele podia fazer os triângulos se encaixarem na parábola de modo tão ajustado quanto quisesse — "exaurindo-a", como dizia. Quando somou as áreas dos triângulos individuais (usando a fórmula da progressão geométrica), Arquimedes descobriu que a área total se aproximava de 4/3 da área do triângulo *ABC*. Mais precisamente, usando cada vez mais triângulos, ele podia fazer a área total se aproximar o quanto quisesse deste valor.[4] Em termos modernos, a somadas áreas dos triângulos se aproxima do *limite* 4/3 (fazendo a área do triângulo *ABC* igual a 1) à medida que o número de triângulos tende ao infinito. Arquimedes, entretanto, foi cuidadoso em formular esta solução em termos de somas finitas, a palavra *infinito* nunca aparece em seu argumento e por uma boa razão: os gregos tinham banido o infinito de suas considerações e se recusavam a incorporá-lo em seu sistema matemático. Logo veremos por quê.

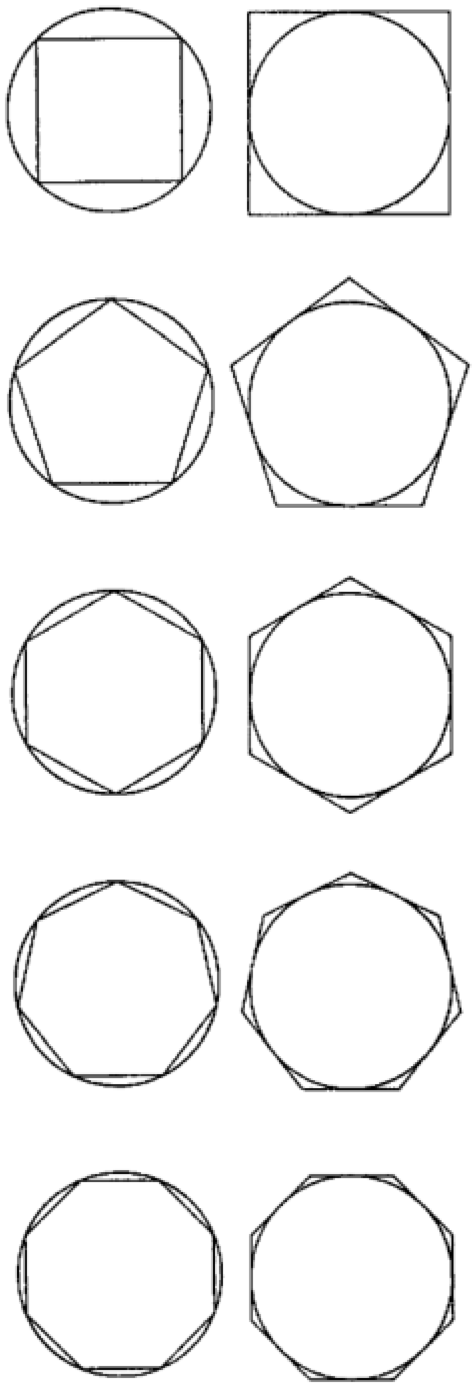


Figura 6 (esquerda). Poligo nos regulares inscritos em um círculo.

Figura 7 (direita). Polígonos regulares circunscrevendo um círculo.

O método de Arquimedes passou a ser conhecido como o *método da exaustão*. Embora não se tivesse originado com ele (sua invenção é atribuída a Eudoxo, em torno de 370 a.C.), Arquimedes foi o primeiro a aplicá-lo com sucesso à parábola. Mas não conseguiu fazê-lo funcionar no caso de duas outras curvas famosas, a elipse e a hipérbole, que, junto com a parábola, formam a família das *seções cônicas*.[5] Apesar de tentativas repetidas, Arquimedes não pôde encontrar a área dos setores elípticos e hiperbólicos, embora tivesse sugerido, corretamente, que a área de toda a elipse era πab (onde a e b são os comprimentos do eixo maior e do eixo menor). Esses casos tiveram que esperar pela invenção do cálculo integral, dois mil anos depois.

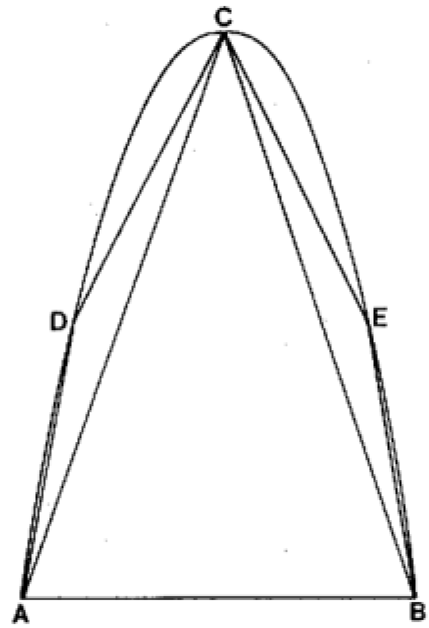


Figura 8. O método da exaustão de Arquimedes aplicado a uma parábola.

O método da exaustão chegou muito perto do nosso moderno cálculo integral. Por que, então, os gregos não descobriram o cálculo? Houve dois motivos: o mal-estar dos gregos ante o conceito de infinito — que tem sido chamado de seu *horror infiniti* — e o fato de que eles não possuíam a linguagem da álgebra. Vamos começar pelo segundo motivo. Os gregos eram mestres da geometria — virtualmente toda a geometria clássica foi desenvolvida por eles. Suas contribuições para a álgebra, entretanto, foram muito pequenas. A álgebra é essencialmente uma linguagem, uma coleção de símbolos e um conjunto de regras para operar com esses símbolos. Para desenvolver tal linguagem precisamos ter um bom sistema de notação e foi aqui que os gregos falharam. Seu fracasso pode ser atribuído à visão estática que tinham do mundo e da geometria em especial: eles consideravam todas as quantidades geométricas como possuindo magnitudes fixas, determinadas. Nossa prática moderna de designar uma quantidade por uma única letra, digamos *x,* e considerá-la uma variável que pode assumir uma série de valores era estranha para eles, Os gregos chamavam um segmento de reta ligando *A* a *B* de *AB,* um retângulo com vértices *A, B, C, D* de *ABCD* e assim por diante. Tal sistema de notação servia muito bem para seu propósito de estabelecer o conjunto de relações que existem entre as várias partes de uma figura — o corpo de teoremas que forma a geometria clássica. Mas quando chegava a hora de expressar as relações entre quantidades *variáveis*, o sistema era terrivelmente inadequado. Para expressar tais relações com eficiência precisamos recorrer à linguagem da álgebra.

Os gregos não eram totalmente ignorantes em relação a álgebra. Muitas das fórmulas elementares da álgebra eram conhecidas por eles, mas sempre interpretadas como representações de relações geométricas entre as várias partes de uma figura. Para começar, um número era interpretado como o comprimento de um segmento de reta, a soma de dois números como o comprimento combinado de dois segmentos colocados um ao lado do outro ao longo da mesma linha reta e o produto de dois números como a área do retângulo que tivesse esses segmentos como lados. A fórmula familiar $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ podia então ser interpretada do seguinte modo: ao longo de uma linha reta trace o segmento de comprimento $AB = x$ e no seu ponto final marque um segundo segmento $BC = y$ e construa um quadrado de lado $AC = x+y$, como o da figura 9. Esse quadrado pode ser dividido em quatro partes: dois pequenos quadrados com áreas $AB.AB = x^2$ e $BC.BC = y^2$ e dois retângulos com áreas $AB.BC = xy$. (Existem algumas sutilezas nesta demonstração, tais como o fato de que os retângulos *BCDE* e *EFGH* são congruentes tendo, portanto, a mesma área. Os gregos faziam um grande esforço para explicar todos esses detalhes meticulosamente, justificando cada passo da demonstração.) Métodos semelhantes eram usados para demonstrar outras relaçõies algébricas tais como $(x-y)^2 = x^2-2\,xy+y^2$ e $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

Temos que admirar o êxito dos gregos em estabelecer uma grande parte da álgebra elementar usando apenas meios geométricos. Mas esta "álgebra geométrica" não podia ser usada como uma ferramenta matemática útil. Sem um bom sistema de notação — uma álgebra no sentido moderno da palavra —, os gregos ficaram privados de sua maior vantagem: a capacidade de exprimir de modo conciso as relações entre quantidades variáveis. E isso inclui o conceito de infinito.

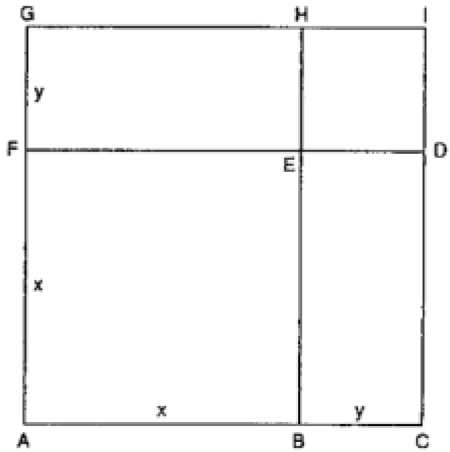


Figura 9. Prova geométrica da fórmula $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Por não ser um verdadeiro número, não podemos lidar com o infinito num sentido puramente numérico. Já vimos que, para encontar o valor de várias formas indeterminadas, devemos usar o processo de limite, o que, por sua vez, exige um bocado de habilidade algébrica. E sem essa habilidade os gregos eram incapazes de trabalhar adequadamente com o infinito. Em conseqüência disso eles o evitavam e até mesmo o temiam. No século IV a.C., o filósofo Zenão de Eléia apresentou quatro paradoxos — ou "argumentos", como ele os chamava — cujo objetivo era demonstrar a incapacidade dos matemáticos de lidar com o conceito de infinito. Um desses paradoxos tenta demonstrar que o movimento é impossível. Para que um corredor possa mover-se do ponto *A* para o ponto *B,* ele precisa primeiro alcançar o ponto médio da distância *AB,* então o ponto médio da distancia remanescente e assim por diante, *adinfinitum* (fig. 10). E como esse processo exige um número infinito de passos, argumentava Zenão, o corredor nunca alcançará seu destino.

É fácil explicar o paradoxo do corredor usando-se o conceito de limite. Se considerarmos o segmento de reta *AB* como a unidade de comprimento, então a distância total a ser percorrida pelo corredor será fornecida pela série geométrica infinita de 1/2+1/4+1/8+1/16+…. Esta série possui a propriedade de que não importa quantos termos acrescentarmos, a soma nunca chegará a 1, muito menos excederá a 1. E no entanto podemos chegar tão perto quanto quisermos de 1, acrescentando mais e mais termos. Dizemos então que a série *converge* para 1 ou tem o *limite* 1, à medida que o número de termos tende ao infinito. Assim, o corredor vai percorrer uma distância total de exatamente uma unidade (o comprimento da distância original *AB)* e o paradoxo é resolvido. Os gregos, entretanto, achavam difícil aceitar o fato de que uma soma infinita de números possa convergir para um limite finito. A idéia de ir ao infinito era tabu para eles. Por isso Arquimedes, no método da exaustão, nunca menciona a palavra *infinito.* Se ele tinha em mente um processo infinito, e não resta dúvida de que tinha, ele foi cuidadoso em o formular como um processo finito, que poderia ser repetido várias vezes até que se conseguisse a precisão desejada.[6] Consequentemente, o método da exaustão, embora seja um modelo de pensamento rigoroso, está tão saturado de detalhes pedantes que se torna praticamente inútil para lidar com formas geométricas que não sejam as mais simples. E o que é pior, a resposta para qualquer problema específico tinha que ser conhecida antecipadamente. Só então o método da exaustão poderia ser usado para determinar o resultado com precisão.[7]

Assim, embora Arquimedes tivesse uma firme compreensão intuitiva do conceito de limite, ele não pôde dar o passo crucial de transformá-la em um procedimento geral e sistemático — um algoritmo — que pudesse ser aplicado a uma variedade de casos diferentes. Como Moisés olhando para a Terra Prometida, do alto do monte Nebo e não podendo nela entrar, Arquimedes chegou perto de descobrir uma nova ciência,[8] mas então teve que passar a tocha para seus sucessores.

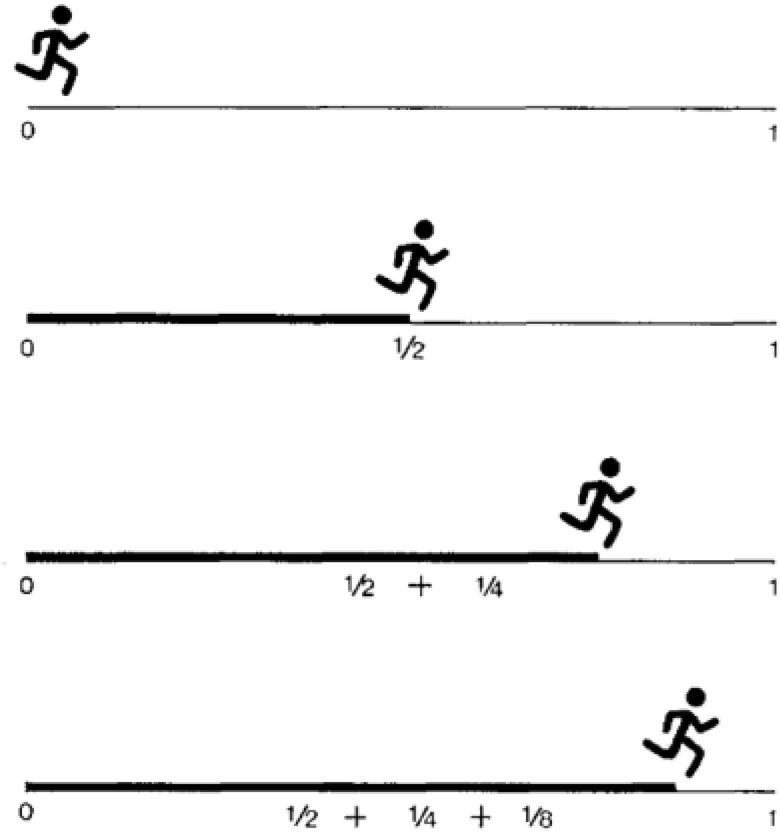


Figura 10. O paradoxo do corredor.

NOTAS E FONTES

1. O valor 256/81 pode ser escrito como $(4/3)^4$.
2. *The Rhind Mathematical Papyrus,* trad. Arnoid Buffum Chace (Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1978), problemas 41-43 e 50. O papiro Rhind encontra-se agora no Museu Britânico.
3. Ronald Calinger, ed., *Classics of Mathematics* (Oak Park, III, Moore Publishing Company, 1982), pp. 128-131.
4. Ibid.pp. 131-133.
5. As seções cônicas também incluem o círculo e um par de linhas retas; estas, contudo, são meramente casos especiais da elipse e da hipérbole. Teremos mais'a dizer sobre as seções cônicas posteriormente.
6. Assim, no caso da parábola, Arquimedes provou, através de um duplo *reductio ad absurdum* (uma prova indireta que começa presumindo-se que a afirmação a ser provada está errada e

então produz uma contradição), que a soma da série infinita $1+1/4+1/4^2+\ldots$ não pode nem ser maior nem menor do que 4/3 e portanto deve ser igual a 4/3. Hoje em dia, é claro, usaríamos a fórmula da soma de uma série geométrica infinita $1+q+q^2+\ldots = 1/(1-q)$ onde $-1 < q < 1$, para obter o resultado $1/(1-1/4) = 4/3$.

7. Que Arquimedes tinha um meio de "prever" tais resultados antecipadamente pode ser confirmado em seu tratado conhecido como *O método,* descoberto em 1906 quando J. L. Heiberg encontrou um manuscrito medieval, em Constantinopla, cujo texto fora escrito sobre outro, muito mais antigo e parcialmente apagado. O texto mais velho revelou-se uma cópia do século X de vários trabalhos de Arquimedes, entre eles *O método,* que durante muito tempo se julgara perdido. Assim, o mundo teve a rara oportunidade de vislumbrar os processos de pensamento de Arquimedes — uma oportunidade inestimável, já que os gregos, ao fornecerem seus teoremas geométricos, não deram nenhuma indicação de como tinham sido descobertos. VerThomas L. Heath, *The Works of Archimedes* (1897; reedição Dover, Nova York, 1953); esta edição contém um suplemento de 1912, "*The Method of Archimedes*", com uma introdução.
8. Sobre esta questão, ver Heath em *The Works of Archimedes,* Cap. 7 ("Antecipação de Arquimedes do Cálculo Integral").

6

Prelúdio de uma descoberta

Infinidades e indivisibilidades transcendem nossa compreensão finita, as primeiras devido à sua magnitude, as últimas devido à sua pequenez; imagine como são quando elas se combinam.

– Galileu Galilei como Salviati em *Diálogos sobre duas novas ciências* (1638).

Cerca de dezoito séculos depois de Arquimedes, um matemático francês chamado François Viète (ou Vieta, 1540-1603), no curso de seu trabalho em trigonometria, encontrou uma fórmula notável envolvendo o número π:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

A descoberta desse *produto infinito* em 1593 foi um marco na história da matemática: a primeira vez que um processo infinito era escrito explicitamente como uma fórmula matemática. De fato, a característica mais extraordinária da fórmula de Viète, além de sua elegância, são os três pontos no final, indicando que ela continua e continua… *ad infinitum.* Ela mostra que o valor de 71 pode ser encontrado, pelo menos em princípio, usando-se repetidamente quatro operações da matemática elementar — adição, multiplicação, divisão e a extração da raiz quadrada —, todas aplicadas ao número 2.

A fórmula de Viète quebrou uma importante barreira psicológica, já que o mero ato de escrever os três pontos no final sinalizava a aceitação dos processos infinitos na matemática e abria o caminho para seu uso generalizado. O matemático inglês John Wallis (1616-1703), cujo trabalho intitulado *Arithmetica infmitorum* (1655) acabaria por influenciar o jovem Newton, descobriu outro produto infinito envolvendo o π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots.$$

E, em 1671, o escocês James Gregory (1638-1675) descobriu a *série infinita*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots.$$

O que torna essas fórmulas tão notáveis é que o número π, originalmente definido em relação ao círculo, pode ser expresso somente em termos de inteiros, ainda que através de um processo infinito. Até hoje, essas fórmulas estão entre as mais belas de toda a matemática.

Mas com toda a sua beleza, a utilidade dessas fórmulas como meio de calcular π é um tanto limitada. Como vimos, várias aproximações boas de π já eram conhecidas desde os tempos antigos. Ao longo dos séculos foram feitas numerosas tentativas para se conseguir melhores aproximações, isto é, encontrar o valor correto de mais e mais casas decimais de π. A esperança era de que a expansão decimal de π finalmente chegasse a um fim (isto é, passasse a conter apenas zeros de um certo ponto em diante) ou começasse a se repetir ciclicamente. Qualquer destes dois eventos implicaria que π é um *número racional,* uma proporção entre dois inteiros (sabemos hoje que esta relação não existe e que π *é* uma expansão infindável que não se repete). Entre os muitos matemáticos que esperavam alcançar este objetivo, um nome é particularmente notável. Ludolph van Ceulen (1540-1610), um matemático alemão-holandês que dedicou a maior parte de sua vida à tarefa de calcular π e no último ano de sua existência chegou ao valor correto de trinta e cinco casas decimais, O feito foi considerado tão importante em sua época que o número foi gravado em sua tumba, em Leiden, e durante muitos anos os livros alemães se referiam ao π como o “número iudolfino”. Sua realização, contudo, não lançou uma nova luz sobre a natureza de *n* (van Ceulen simplesmente repetiu o método de Arquimedes com polígonos de maior número de lados) nem contribuiu com nada de novo para a matemática em geral. Felizmente para a matemática, tamanha tolice não seria repetida no caso do *e*.

Portanto, as fórmulas recém descobertas eram notáveis não tanto por sua praticidade, como pela visão que forneciam quanto à natureza do processo infinito. Aqui temos um bom exemplo das diferentes filosofias nas duas escolas de pensamento matemático: A escola "pura" *versus* a escola "aplicada". Os matemáticos puros seguem sua profissão pouco se preocupando com as aplicações práticas (alguns chegam a afirmar que quanto mais a matemática for afastada das questões práticas, melhor será para a profissão). Para certos membros dessa escola, a pesquisa matemática é como um bom jogo de xadrez, uma atividade cuja principal recompensa é o estímulo intelectual que fornece. Outros buscam suas pesquisas pela liberdade que proporcionam. A liberdade para criar suas próprias definições e regras, sobre elas erguendo uma estrutura mantida unicamente pelas regras da lógica matemática. Em oposição, os matemáticos aplicados se preocupam mais com a vasta coleção de problemas que surgem da ciência e da tecnologia. Eles não desfrutam do mesmo grau de liberdade dos seus colegas "puros", já que são limitados pelas leis da natureza que governam os fenômenos sob sua investigação. É claro que a linha divisória entre as duas escolas nem sempre é rigorosamente definida: um campo de pesquisa "pura" muitas vezes revela uma inesperada aplicação prática (um exemplo é a aplicação da teoria dos números para a codificação e decodificação de mensagens secretas), e contrariamente, problemas aplicados já conduziram a descobertas teóricas do mais alto grau. Entretanto, alguns dos maiores nomes da história da matemática — entre eles Arquimedes, Newton e Gauss — eram igualmente notáveis nos dois campos. A linha divisória, contudo, é bem real e tornou-se mais acentuada em nossa época, onde a especialização estreita substituiu o universalismo das gerações anteriores.

Essa linha divisória entre as duas escolas avançou e recuou ao longo dos anos. Nos tempos antigos, anteriores aos gregos, a matemática era uma vocação inteiramente prática, criada para lidar com questões mundanas tais como as medições (medidas de área, volume e peso), questões monetárias e o controle do tempo. Foram os gregos que transformaram a matemática, de uma profissão prática em outra intelectual, onde o conhecimento pelo conhecimento era o objetivo. Pitágoras, que fundou sua famosa escola de filosofia no século VI a.C., defendeu os ideais da matemática pura em seu nível mais alto. Sua inspiração vinha da ordem e da harmonia da natureza — não da natureza próxima, ao nosso redor, mas de todo o universo. Os pitagóricos acreditavam que os números eram a causa primeira de tudo no mundo, das leis da harmonia musical ao movimento dos planetas. "O número governa o universo" era o seu lema e por "número" eles queriam dizer os números naturais e suas relações. Tudo o mais — números negativos, números irracionais e até mesmo o zero — era excluído. Na filosofia pitagórica os números assumiam uma condição quase sagrada, todo o tipo de significados míticos sendo ligado a eles. Se esses números realmente descreviam o mundo real, era considerado irrelevante. Como resultado disso a matemática pitagórica era um assunto esotérico, distanciado das questões diárias e colocado na mesma categoria da filosofia, da arte e da música. Pitágoras dedicou uma boa parte de seu tempo às leis da harmonia musical. Ele teria criado uma escala musical baseada nas proporções "perfeitas" de 2: 1 (oitava) 3: 2 (quinta) e 4: 3 (a quarta). E não importa se as leis da acústica exigiam um arranjo mais complicado de notas; o importante é que a escala se apoiava em proporções matemáticas simples.

A filosofia pitagórica exerceu enorme influência sobre gerações de cientistas durante mais de dois mil anos. Mas, quando a civilização ocidental começou a emergir da Idade Média, a ênfase mudou, uma vez mais, para a matemática aplicada. Dois fatores contribuíram para essa mudança: as grandes descobertas geográficas dos séculos XV e XVI colocaram ao alcance terras distantes que precisavam ser exploradas (e, mais tarde, utilizadas) e isso, por sua vez, pedia o desenvolvimento de novos métodos de navegação aperfeiçoada, A teoria heliocêntrica de Copérnico forçou os cientistas a reexaminarem o lugar da Terra no universo e as leis físicas que governam o seu movimento. Ambos os desenvolvimentos exigiam uma quantidade cada vez maior de matemática prática, principalmente de trigonometria esférica. Assim, os dois séculos seguintes colocaram em destaque uma linha de matemática aplicada de alto nível, começando com o próprio Copérnico e culminando com Kepler, Galileu e Newton.

AJohannes Kepler (1571-1630), um dos homens mais estranhos da história da ciência, devemos a descoberta das três leis planetárias'que levam o seu nome. Elas foram encontradas depois de anos de buscas fúteis que o levaram, primeiro, até as leis da harmonia musical, que ele acreditava governarem o movimento dos planetas (daí a frase “música das esferas”), e em seguida à geometria dos cinco sólidos platônicos,[5] a qual, de acordo com ele, determinaria os espaços entre as órbitas dos seis planetas conhecidos. Kepler foi o símbolo perfeito de um período de transição entre o velho mundo e o novo: ele era, ao mesmo tempo, um matemático aplicado do mais alto nível e um ardente pitagórico, um místico que foi guiado (ou desorientado) por considerações metafísicas tanto quanto pelo firme raciocínio científico. (Kepler praticava ativamente a astrologia ao mesmo tempo em que fazia suas grandes descobertas astronômicas.) Hoje em dia as atividades não científicas de Kepler estão, em grande parte, esquecidas, como as de seu contemporâneo Napier, mas seu nome está seguro na história como o fundador da moderna astronomia matemática.

A primeira das leis de Kepler diz que os planetas se movem em torno do Sol ao longo de elipses, com o Sol no foco de cada elipse. Esta descoberta foi o golpe de misericórdia na velha imagem grega de um universo geocêntrico, no qual os planetas e as estrelas estavam embebidos em esferas cristalinas que giravam em torno da Terra a cada vinte e quatro horas. Newton depois mostraria que a elipse (com o círculo como um caso especial) é apenas um membro de uma família de órbitas nas quais os corpos celestes podem se mover, as outras sendo a parábola e a hipérbole. Essas curvas (às quais devemos acrescentar um par de linhas retas como casos limites de hipérbole), formam a família das *seções cônicas*, assim chamadas porque podem ser obtidas cortando-se um cone circular com um plano em vários ângulos de incidência (fig.11). As seções cônicas já eram conhecidas pelos gregos, e um contemporâneo de Arquimedes, Apoiônio (cerca de 260-190 a.C.), escreveu um amplo tratado sobre elas. Agora, dois mil anos depois, a atenção dos matemáticos voltava-se novamente para as seções cônicas.

A segunda lei de Kepler declara que a linha ligando um planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais. Assim, a questão de achar a área de um segmento elíptico — e mais geralmente, de qualquer seção cônica — tornava-se subitamente crucial. Como vimos, Arquimedes tinha usado com sucesso o método da exaustão para encontrar a área de um segmento parabólico, mas fracassara no caso da elipse e da hipérbole.

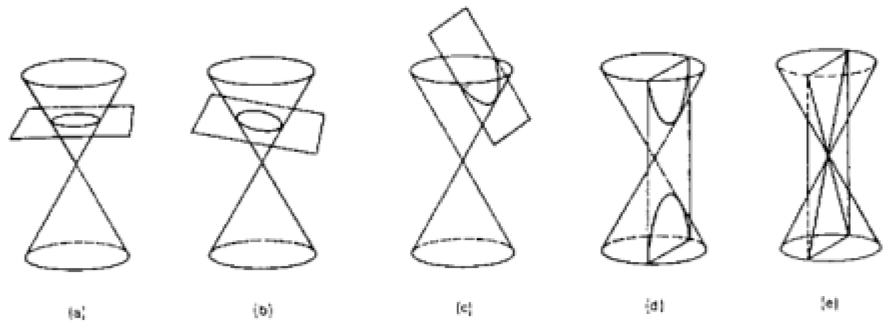


Figura 11. As cinco seções cônicas.

Kepler e seus contemporâneos agora demonstravam um renovado interesse no método de Arquimedes, mas onde Arquimedes era cuidadoso em usar apenas processos finitos — ele nunca usara explicitamente a noção do infinito — seus seguidores modernos não deixam essas sutilezas pedantes ficar em seu caminho. Eles adotaram a idéia do infinito de um modo casual, quase atrevido, usando-o para seu proveito sempre que possível. O resultado foi uma tosca improvisação, que não tinha nada do rigor do método grego mas que, de algum modo, parecia funcionar: o *método dos indivisíveis.* Pensando em uma forma plana como sendo composta por um número de faixas infinitamente estreitas, as chamadas "indivisíveis", pode-se encontrar a área da forma ou tirar algumas outras conclusões sobre ela. Por exemplo, pode-se provar (*demonstrar* seria uma palavra melhor) a relação entre a área de um círculo e a sua circunferência, considerando o círculo como a soma de um número infinito de triângulos estreitos, cada um com seu vértice no centro e sua base ao longo da circunferência (fig. 12). Como a área de cada triângulo é a metade do produto de sua base por sua altura, a área total de todos os triângulos é a metade do produto entre a altura comum (o raio do círculo) e a soma de suas bases, a circunferência). O resultado é a fórmula $A = Cr/2$.

É claro que deduzir esta fórmula pelo método dos indivisíveis é exercer uma sabedoria tardia, já que a fórmula era conhecida na antigüidade (ela pode ser obtida simplesmente pela eliminação do *it* entre as equações $A = \pi r^2$ e $C = 2\pi r$). Além disso o método era defeituoso em vários aspectos: Para começar ninguém entendia exatamente o que eram esses “indivisíveis”, e muito menos como trabalhar com eles.

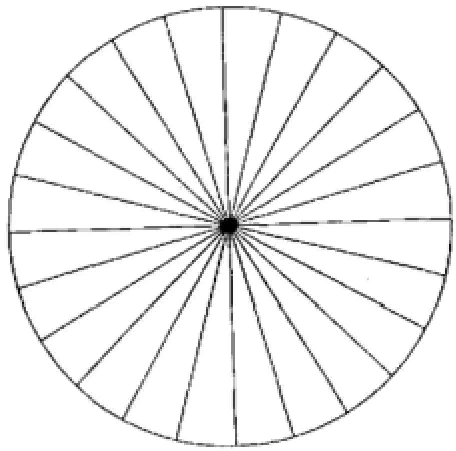


Figura 12. A irea do circulo pode ser imaginada como a soma de um número infinito de pequenos triângulos, cada um com o vértice no centro e a base ao Longo da circunferência.

Pensava-se no indivisível como uma quantidade infinitamente pequena — de fato, uma quantidade de magnitude 0 — e certamente, se somarmos qualquer número dessas quantidades, o resultado ainda seria 0. (Reconhecemos aqui a expressão indeterminada ∞. 0.) Segundo, o método — se realmente funcionava — exigia um bocado de engenhosidade geométrica e era preciso projetar o tipo certo de indivisíveis para cada problema. E no entanto, apesar de todas as suas falhas, o método funcionava de alguma forma e, em muitos casos, produziu novos resultados. Kepler foi um dos primeiros a fazer pleno uso dele. Por algum tempo, deixou de lado sua pesquisa astronômica para lidar com um problema bem mundano: encontrar o volume de vários barris de vinho. (Diz-se que ele não estava satisfeito com o modo como os mercadores mediam o conteúdo dos seus barris.) Em seu livro *Nova stereometria doliorum vinartorum* (Nova geometria sólida dos barris de vinho, 1615), Kepler aplicou o método dos indivisíveis para encontrar os volumes de numerosos sólidos de revolução (sólidos obtidos ao girar uma forma plana em torno de um eixo no plano da forma). Ele fez isso estendendo o método para três dimensões e considerando um sólido como uma coleção de muitas fatias infinitamente finas, ou lâminas, e somando seus volumes individuais. Ao empregar essas idéias, ele chegou a um passo do moderno cálculo integral.

NOTAS E FONTES

1. Traduzido por Henry Crew e Alfonso De Salvio (1914, reimpressão Nova York: Dover, 1914).
2. Petr Beckmann, *A History of 7t* (Boulder, Colo.: Golem Press, 1977), p. 102.
3. O recorde de Van Ceulen há muito foi quebrado. Em 1989 dois pesquisadores americanos da Universidade de Colúmbia usaram um supercomputador para calcular *Tí* com 480 milhões de casas decimais. Se fosse impresso, o número se estenderia por 600 milhas. Ver também Beckmann, *A History ofjl,* Cap. 10.
4. Muito do que sabemos sobre Pitágoras vem de trabalhos feitos por seus seguidores, freqüentemente escritos séculos depois de sua morte. Daí que muitos dos “fatos” sobre sua vida devem ser considerados com uma certa dose de dúvida. Diremos mais sobre Pitágoras no Cap. 15.
5. Num sólido regular, ou platônico, todas as faces são polígonos regulares e o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice. Existem, exatamente, cinco sólidos platônicos: o tetraedro (quatro faces, cada uma um triângulo eqüilátero), o cubo, o octaedro (oito triângulos eqüiláteros), o dodecaedro (doze pentágonos regulares) e o icosaedro (vinte triângulos eqüiláteros). Todos os cinco eram conhecidos pelos gregos.

Os indivisíveis em funcionamento

Como exemplo do método dos indivisíveis vamos encontrar a área sob a parábola $y = x^2$, para $x = 0$ e $x = a$. Nós imaginamos a região pedida como sendo formada por um grande número n de segmentos de linhas verticais ("indivisíveis") cujas alturas, y, variam em relação a x de acordo com a equação $y = x^2$ (fig, 13). Se esses segmentos de linhas forem separados por uma distância horizontal fixa, d, suas alturas são d^2, $(2d)^2$, $(3d)^2, \ldots$, $(nd)^2$. A área pedida é assim aproximada pela soma

$$[d^2 + (2d)^2 + (3d)^2 + \ldots + (nd)^2] \cdot d$$
$$= [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2] \cdot d^3.$$

Usando a bem conhecida fórmula do somatório dos quadrados dos inteiros, esta expressão é igual a $[n(n+1)(2n+1)/6]$. d^3, ou, depois de uma ligeira manipulação algébrica,

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)(nd)^3}{6}.$$

Como o comprimento do intervalo de $x = 0$ a $x = a$ é a, sabemos que $nd = a$, de modo que a última expressão se torna

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)a^3}{6}.$$

Finalmente, se deixarmos o número de indivisíveis crescer sem limites (isto é, deixarmos n —» os termos l/w e *2!n* tendem a 0 e obteremos a área

$$A = \frac{a^3}{3}.$$

Isto, é claro, coincide com o resultado $A = {}_0\!\int^a x^2\, dx = a^3/3$ obtido por integração. É também compatível com o resultado de Arquimedes, obtido pelo método da exaustão, no qual a área do segmento parabólico *OPQ* na figura 13 é 4/3 da área do triângulo *OPQ,* como podemos verificar facilmente.

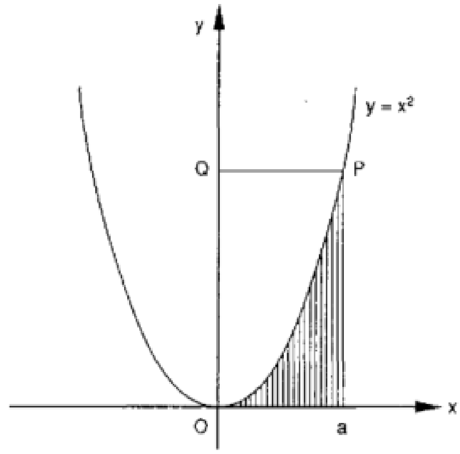


Figura 13. Encontrando a área sob a parábola pelo método dos indivisíveis.

Além de os pioneiros do método dos indivisíveis não serem claros a respeito do que era exatamente um "indivisível", o método é tosco e depende muito de se encontrar alguma fórmula adequada para o somatório. Ele não pode ser usado para encontrar a área sob a hipérbole $y = 1/x$ porque não existe fórmula para o somatório dos inversos dos inteiros. Assim, embora o método funcione em muitos casos particulares, ele carece da generalidade e da natureza algorítmica da moderna técnica de integração.

7

A quadratura da hipérbole

Grêgoire Saint-Vincent é o maior dos quadradores de círculos... Ele encontrou uma propriedade da área da hipérbole que fez com que os logaritmos de Napier passassem a se chamar hiperbólicos.

– AUGUSTUS DE MORGAN, *The Encyclopedia of Eccentrics* (1.915)

O problema de encontrar a área de uma forma plana fechada *é* conhecido como *quadratura.* A palavra refere-se à própria natureza da problema: expressar a área em termos de unidades de área, que são quadrados. Para os gregos isto significava que a forma dada tinha que ser transformada num equivalente cuja área pudesse ser encontrada a partir dos princípios fundamentais. Para dar um exemplo simples, suponha que queremos encontrar a área do retângulo de lados a e b. Se este retângulo deve ter a mesma área de um quadrado de lado x, teremos $x^2 = ab$, ou $x = \sqrt{(ab)}$. Usando um esquadro e um compasso podemos facilmente construir um segmento de comprimento $\sqrt{(ab)}$, como mostra a figura 14. Assim poderemos encontrar a quadratura de qualquer retângulo e daí a de qualquer paralelogramo ou qualquer triângulo, porque essas formas podem ser obtidas a partir de um retângulo através de construções simples (fig. 15). A isto imediatamente segue-se a quadratura de qualquer polígono, porque um polígono pode ser sempre dissecado em triângulos.

No devido tempo, esse aspecto puramente geométrico do problema da quadratura abriu caminho para uma abordagem mais computacional. A construção real de uma forma equivalente não era mais considerada necessária,

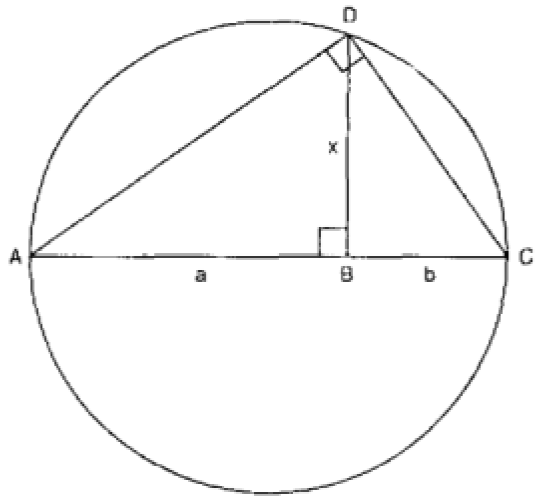


Figura 14. Construindo um segmento de comprimento $x = \sqrt{ab}$ com régua e compasso. Sobre uma reta marque um segmento AB de comprimento a, e no seu final acrescente um segundo segmento BC de comprimento b. Depois construa um semicírculo tendo AC como diâmetro. Em B erga uma perpendicular a AC, prolongando-a até encontrar o círculo em D. Chame de x o comprimento BD. Através de um teorema bem conhecido na geometria, $\sphericalangle ADC$ é um ângulo reto. Daí segue que $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BDC$ e, conseqüentemente, os triângulos BAD e BDC são semelhantes. Portanto $AB/BD = BD/BC$ ou $a/x = x/b$, de onde obtemos $x = \sqrt{ab}$.

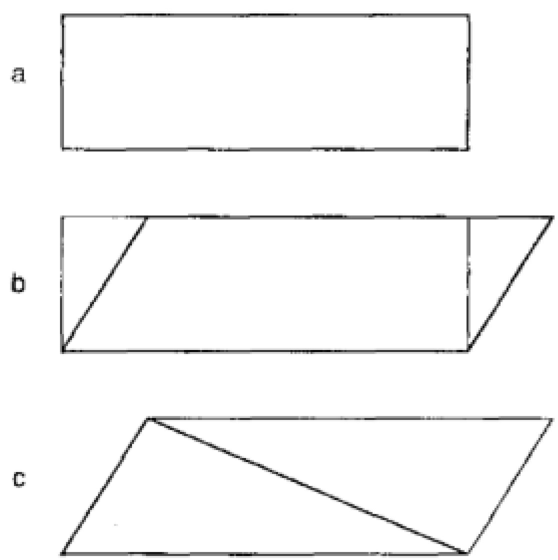


Figura 15. O retângulo (a) e o paralelogramo (b) têm a mesma área. O triângulo (c) tem metade desta átea.

desde que pudéssemos demonstrar que tal construção poderia ser feita *em princípio.* Neste sentido o método da exaustão não era uma verdadeira quadratura, já que exigia um número infinito de passos e assim não poderia ser realizado por meios puramente geométricos. Mas, com a introdução dos processos infinitos na matemática, por volta de 1600, até mesmo esta restrição caiu, e o problema da quadratura tornou-se puramente computacional.

Entre as formas que resistiam teimosamente a todas as tentativas de quadratura estava a hipérbole. Esta curva é obtida quando um cone é cortado por um plano num ângulo maior do que o ângulo existente entre a base do cone e o seu lado (daí o prefixo "hiper" significando "em excesso de"). Mas, ao contrário do familiar cone de sorvete, aqui estamos pensando no cone como *duas* peças iguais unidas pela ponta. Como resultado disso a hipérbole fica com dois ramos separados e simétricos (ver a fig. 11 [d]). Além disso, a hipérbole tem um par de linhas retas associadas a ela, suas duas linhas tangentes no infinito. Quando nos movemos ao longo de cada ramo, afastando-nos do centro, nos aproximamos cada vez mais dessas linhas, mas nunca as alcançamos. Essas linhas são as *assíntotas* da hipérbole (a palavra em grego significa "não se encontrando"); elas são a manifestação geométrica do conceito de limite discutido anteriormente.

Os gregos estudaram as seções cônicas a partir de um ponto de vista puramente geométrico. Mas a invenção da geometria analítica no século XVII fez com que o estudo dos objetos geométricos e das curvas em particular se tornasse cada vez mais uma parte da álgebra. No lugar da curva em si, considerava-se a *equação* que relacionava as coordenadas x e y de um ponto da curva. Descobrimos então que cada uma das seções cônicas é um caso especial de uma equação *quadrática* (de segundo grau), cuja forma geral é $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey=F$. Por exemplo, se $A=B=F=1$ e $C=D=E=0$, nós chegamos à equação $x^2+y^2=1$ cujo gráfico é um círculo com centro na origem e raio 1 (o círculo unitário). A hipérbole mostrada na figura 16 corresponde ao caso $A=B=D=E=0$ e $C=E=1$; e sua equação é $xy=1$ (ou o equivalente $y=l/x$) e suas assíntotas são os eixos x e y. Como as assíntotas são perpendiculares entre si, esse tipo particular de hipérbole é conhecido como *hipérbole retangular.*

Como já vimos, Arquimedes tentou sem sucesso encontrar a quadratura da hipérbole. Quando o método dos indivisíveis foi desenvolvido, no início do século XVII, os matemáticos renovaram suas tentativas para alcançar este objetivo. Mas a hipérbole, ao contrário do círculo e da elipse, é uma curva que vai ao infinito, assim é preciso esclarecer o que queremos dizer por quadratura neste caso. A figura 17 mostra um ramo da hipérbole $xy = 1$. No eixo dos x nós marcamos o ponto fixo $x = 1$ e o ponto arbitrário $x = t$. Por *área sob a hipérbole* queremos nos referir à área entre o gráfico *de* $xy = 1$, o eixo dos x e as linhas verticais (ordenadas) $x = 1$ e $x = t$. É claro que o valor numérico desta área ainda vai depender de nossa escolha de t, sendo, portanto, uma função de t. Vamos chamar essa função *de* $A(t)$. O problema da quadratura da hipérbole resume-se a encontrar esta função, isto é, exprimir a área como uma fórmula envolvendo a variável t.

Por volta do início do século XVII vários matemáticos tentaram resolver este problema independentemente. Os mais destacados entre eles foram Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), os quais, ao lado de Blaise Pascal (1623-1662), formam o grande triunvirato francês de matemáticos nos anos anteriores à invenção do cálculo. Como Bach e Handel na música, Descartes e Fermat são freqüentemente colocados juntos como uma espécie de gêmeos matemáticos. Entretanto, exceto pelo fato de que ambos eram franceses e quase contemporâneos, dificilmente poderíamos encontrar duas figuras mais diferentes. Descartes começou sua vida profissional como soldado, participando da ação em muitas das guerras regionais que aconteciam pela Europa naqueles dias. Ele trocou sua lealdade várias vezes, atendendo qualquer lado que necessitasse dos seus serviços.

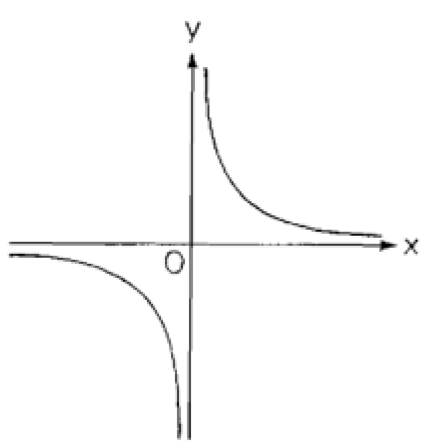


Figura 16. A hipérbole retangular $y = 1/x$

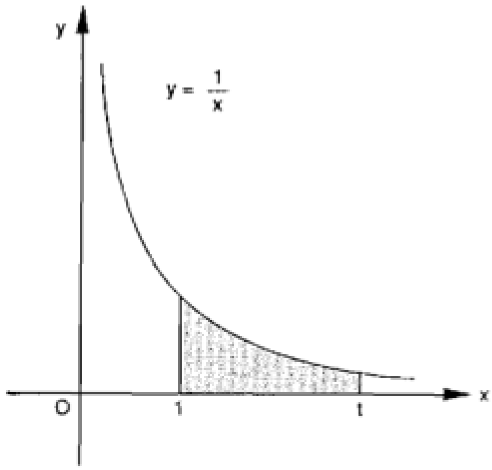


Figura 17. A área sob a hipérbote retangular de $x = 1$ a $x = t$.

Então, certa noite, ele teve uma visão de que Deus lhe confiava a chave para abrir os segredos do universo. Ainda no serviço militar Descartes voltou-se para a filosofia e logo tornou-se um dos filósofos mais influentes de toda a Europa. Seu “penso, logo existo” resumia sua crença num mundo racional, governado pela razão e por um desígnio matemático. Seu interesse pela matemática, afinal, ficou em segundo plano em relação às suas preocupações filosóficas. Ele publicou apenas um trabalho matemático significativo — mas essa obra mudou o mundo da matemática. Em *La Géométrie*, publicada em 1637 como um dos três apêndices de seu principal trabalho filosófico, *Discours de la méthodepour bien conduire sa raison et chercher la vêrité dans les Sciences* (Discurso sobre o método de raciocinar bem e buscar a verdade nas ciências), ele apresentou ao mundo a geometria analítica.

Dizem que a chave para a idéia da geometria analítica ocorreu-lhe quando Descartes estava deitado até tarde na cama, certa manhã, vendo uma mosca andar no teto. A idéia era descrever cada ponto em um plano através de dois números, suas distâncias a partir de duas linhas fixas (fig. 18). Esses números, as *coordenadas* do ponto, permitiam que Descartes transformasse relações geométricas em equações algébricas. Em especial ele considerava a curva como uma série de pontos que possuíam uma propriedade comum. Considerando as coordenadas de um ponto na curva como variáveis, ele podia expressar essa propriedade comum como uma equação que relacionava essas variáveis. Para dar um exemplo simples, o círculo unitário *é* a região de todos os pontos (em um plano) que se encontram a uma unidade de distância do centro. Se escolhermos o centro como a origem do sistema de coordenadas e usarmos o teorema de Pitágoras, obteremos a equação do círculo unitário: $x^2+y^2 = 1$ (como já mencionamos, este *é* um caso especial da equação quadrática geral). Devemos mencionar que o sistema de coordenadas de Descartes não era retangular mas oblíquo e que ele considerava apenas as coordenadas positivas, isto *é,* os pontos no primeiro quadrante — bem distante da prática comum atual.

La Géométrie teve uma influência enorme nas gerações subseqüentes de matemáticos. Entre eles estava o jovem Newton, que comprou uma tradução para o latim e a estudou por conta própria quando ainda era um aluno de Cambridge. O trabalho de Descartes colocou um fim na geometria grega clássica, cuja essência era a construção geométrica e a prova. Daí em diante a geometria tornou-se uma parte inseparável da álgebra, e logo a elas se juntaria o cálculo.

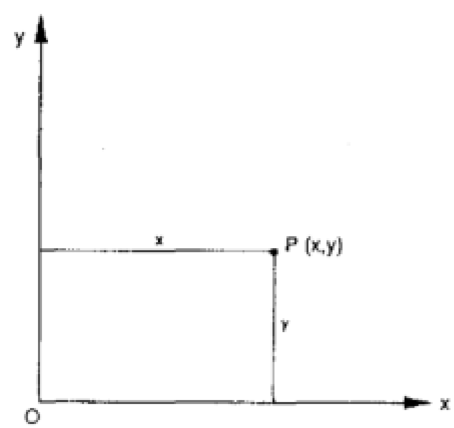


Figura 18. Coordenadas retangulares.

Pierre de Fermat era o oposto exato de Descartes. Enquanto o agitado Descartes mudava constantemente de residência, lealdade e carreira, Fermat era um modelo de estabilidade. De fato, sua vida foi tão monótona que existem poucas histórias a seu respeito. Ele começou sua carreira como funcionário público e, em 1631, tornou-se um membro do *parlement*{corte de justiça) da cidade de Toulouse, um posto que manteve pelo resto de sua vida. No tempo livre ele estudava idiomas, filosofia, literatura e poesia, mas sua principal paixão era a matemática, que considerava uma espécie de recreação intelectual. Enquanto muitos dos matemáticos de sua época eram físicos ou astrônomos, Fermat representava a materialização do matemático puro. Seu principal interesse era a teoria dos números, o mais "puro" entre os ramos da matemática. Entre as muitas contribuições para este campo, está a sua afirmativa de que a equação $x^n+y^n = Z^n$ não tem solução para inteiros positivos, exceto quando $n = 1$ ou 2. O caso para $n = 2$ já era conhecido pelos gregos devido à sua ligação com o teorema de Pitágoras. Eles sabiam que certos triângulos retos possuem lados com comprimentos em valores inteiros, tais como os triângulos com lados 3, 4, 5 ou 5, 12, 13. (De fato $3^2+4^2 = 5^2$ e $5^2+12^2 = 13^2$.) Assim, era natural indagar se uma equação semelhante, para potências mais elevadas de *x, yez,* poderia ter soluções inteiras (excluindo-se os casos triviais 0, 0, 0 e 1,0, 1). A resposta de Fermat foi que não. Na margem de sua cópia da *Arithmetica* de Diofanto, um trabalho clássico sobre a teoria dos números escrito na Alexandria do terceiro século d.C., e traduzido para o latim em 1621, ele escreveu: "Dividir um cubo em dois outros cubos, uma quarta potência ou, em geral, qualquer potência em duas potências da mesma denominação, acima de dois é impossível. Eu encontrei uma prova admirável para isso, mas esta margem é muito estreita para contê-la." Apesar de muitas tentativas e várias afirmações falsas, além de milhares de valores especiais de *n* para os quais a afirmação se revelou verdadeira, a declaração geral ainda não foi provada. Conhecida como O Último Teorema de Fermat ("teorema", é claro, é uma denominação incorreta), constitui o mais famoso entre os problemas não resolvidos da matemática.[1]

Mais perto do nosso tema, Fermat estava interessado na quadratura de curvas cuja equação geral é $y = x^n$, onde *n é* um inteiro positivo. Essas curvas são às vezes chamadas de parábolas generalizadas (a própria parábola é o caso $n = 2$). Fermat fez a aproximação da área sob cada curva através de uma série de retângulos cujas bases formam uma progressão geométrica decrescente. Isto, sem dúvida, é muito semelhante ao método da exaustão de Arquimedcs; mas ao contrário de seu predecessor, Fermat não evitou recorrer a uma série infinita. A figura 19 mostra uma porção da curva $y = x^n$ entre os pontos $x = 0$ e $x = a$ no eixo dos *x*.

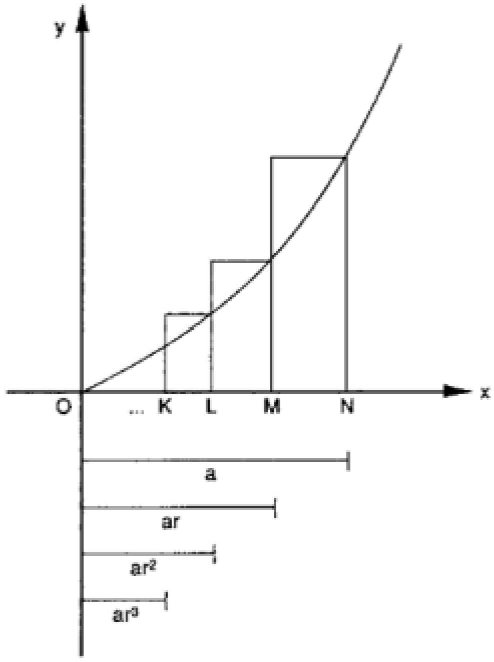


Figura 19. O método de Fermat de aproximação da área sob o gráfico de $y = x^n$ através de uma série de retângulos, cujas bases formam uma progressão geométrica.

Nós imaginamos o intervalo entre $x = 0$ e $x = a$ como sendo dividido num número infinito de subintervalos pelos pontos … *K, L, M, N,* onde $ON = a$. Então, começando em *N* e trabalhando no sentido inverso, para que esses intervalos formem uma progressão geométrica decrescente, nós temos $ON = a$, $OM = ar$, $OL = ar^2$, e assim por diante, onde *r* é menor do que 1. Assim, as alturas (ordenadas) da curva nesses pontos são a^n, $(ar)^n$, $(ar^2)^n$,… A partir daí é fácil encontrar a área de cada retângulo e então somar as áreas, usando a fórmula do somatório para uma série geométrica infinita. A fórmula resultante é:

$$A_r = \frac{a^{n+1}(1-r)}{1-r^{n+1}}, \qquad (1)$$

onde o *r* subscrito em *A* indica que a área ainda depende de nossa escolha de *r*.[2] Fermat então raciocinou que, de modo a melhorar o encaixe entre os retângulos e a curva verdadeira, a largura de cada retângulo devia se tornar pequena.

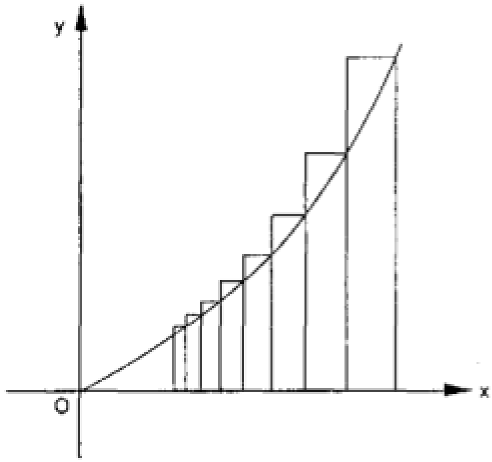


Figura 20. Uma aproximação melhor pode ser obtida fazendo-se os retângulos menores enquanto se aumenta o seu número.

(fig. 20). Para conseguir isso, a proporção comum *r* deve se aproximar de 1, e quanto mais próxima, melhor o encaixe. Aliás, quando $r \to 1$, a equação 1 torna-se a expressão indeterminada 0/0. Fermat foi capaz de contornar essa dificuldade notando que o denominador da equação 1, $1 - r^{n+1}$, pode ser escrito na forma fatorada, como $(1-r)(1+r+r^2+\ldots+r^n)$. Quando o fator $1-r$ no numerador e no denominador é cancelado, a equação 1 torna-se

$$A_r = \frac{a^{n+1}}{1+r+r^2+\ldots+r^n}.$$

Quando deixamos $r \to 1$, cada parcela no denominador tende a 1, o que resulta na fórmula

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Todo estudante de cálculo vai reconhecer a equação 2 como a integral $\int_0^a x^n\, dx = a^{n+1}/(n+1)$ Devemos lembrar, entretanto, que o trabalho de Fermat foi realizado em torno de 1640, trinta anos antes que Newton e Leibniz estabelecessem esta fórmula como parte de seu cálculo integral.[3]

O trabalho de Fermat foi um avanço significativo, porque conseguia a quadratura não apenas de uma curva, mas de toda uma família de curvas, aquelas fornecidas pela equação $y = x^n$ para valores inteiros, positivos de n. (À guisa de verificação, notamos que, para $n = 2$ a fórmula *dá* $A = d^3/3$, o que está de acordo com o resultado obtido por Arquimedes para a parábola.) Além disso, ao modificar ligeiramente seu procedimento, Fermat mostrou que a equação 2 permanece válida mesmo quando n é um inteiro *negativo*, desde que agora calculemos a área de $x = a$ (onde $a > 0$) até o infinito.[4] Quando n é um inteiro negativo, digamos $n = -m$ (onde m é positivo), obtemos a família de curvas $y = x^{-m} = 1/x^m$, chamadas freqüentemente de hipérboles generalizadas. Que a fórmula de Fermat funcione mesmo nesse caso é um tanto notável, já que as equações $y = x^m$ e $y = x^{-m}$, apesar de sua aparente semelhança, representam tipos bem diferentes de curvas: as primeiras são contínuas em toda a parte, enquanto as últimas se tornam infinitas em $x = 0$ e em conseqüência possuem uma "quebra" (uma assíntota vertical) neste ponto.

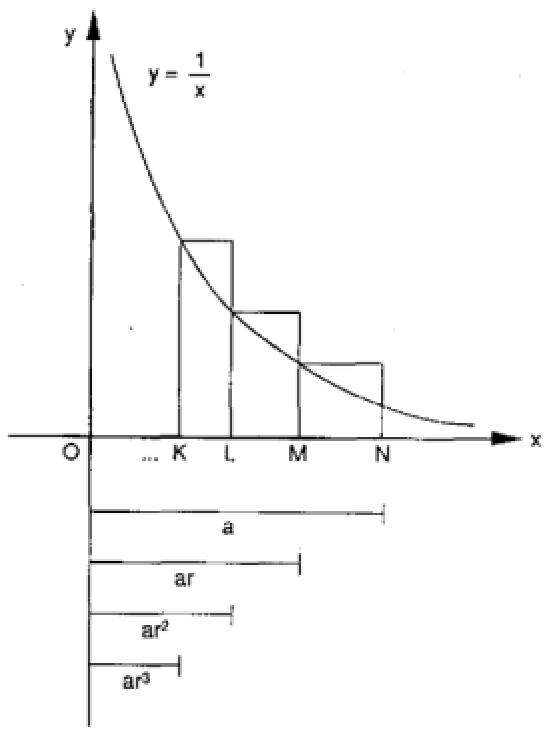


Figura 21. O método de Fermat aplicado à hipérbole. Saint-Vincent percebeu que, quando as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos possuem áreas iguais. Assim a área é proporcional ao logaritmo da distância horizontal.

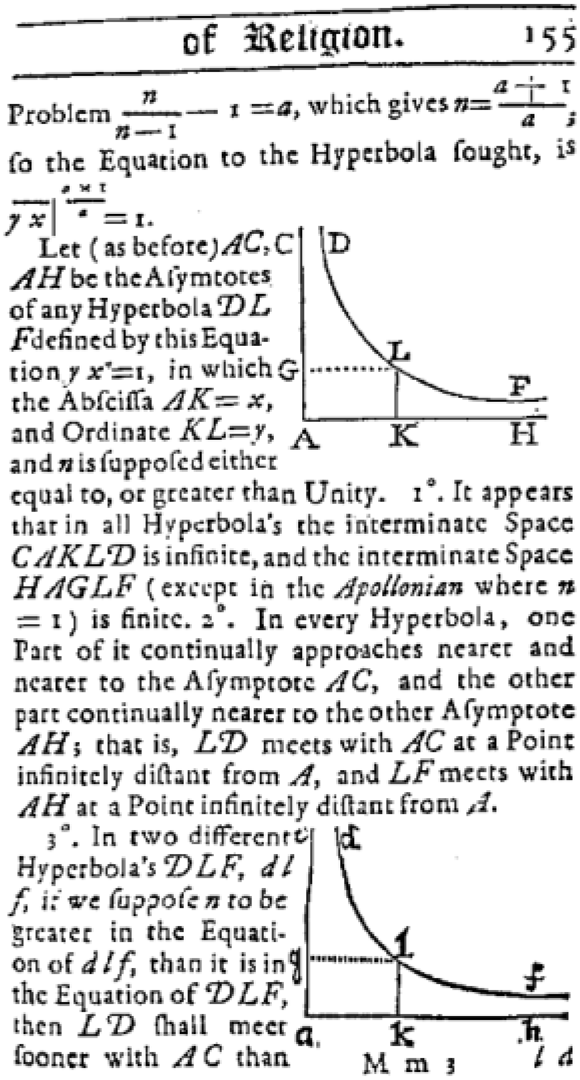
Podemos muito bem imaginar o prazer de Fermat ao descobrir que seu resultado anterior permanecia válido mesmo quando a restrição sob a qual fora obtido originalmente (n =a um inteiro positivo) era removida.[5]

Aliás, havia um pequeno problema. A fórmula de Fermat falhava para uma curva da qual toda a família deriva o seu nome: a hipérbole $y = 1/x = x^{-1}$. Isto ocorre porque para $n = -1$, o denominador $n+1$ na equação 2 se torna 0. A frustração de Fermat por não ser capaz de cobrir este caso tão importante deve ter sido grande, mas ele a escondeu atrás de palavras simples. "Eu digo que todas essas hipérboles infinitas, excetô a de Apolônio [a hipérbole $y = 1/x$], ou a primeira, podem ser quadradas pelo método da progressão geométrica, de acordo com um procedimento geral e uniforme."[6]

Coube a um dos menos conhecidos contemporâneos de Fermat resolver esse renitente caso excepcional. Grégoire (ou Gregorius) de Saint-Vincent (1584-1667), um jesuíta belga que passou a maior parte de sua vida profissional trabalhando em vários problemas de quadratura, particularmente a quadratura do círculo, pela qual ele ficou conhecido entre seus colegas como o quadrador de círculos (revelou-se que sua quadratura, neste caso, era falsa).

Seu principal trabalho, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647), foi compilado a partir de milhares de textos científicos que Saint-Vincent deixou para trás quando fugiu de Praga ante o avanço dos suecos em 1631. Eles foram resgatados por um colega e devolvidos ao autor dez anos depois. O atraso na publicação torna difícil estabelecer a primazia de Saint-Vincent com certeza absoluta, mas parece que ele foi o primeiro a notar que, quando $n = -1$, os retângulos usados na aproximação da área sob a hipérbole possuem, todos, *áreas iguais*. De fato (ver a fig. 21), as larguras dos retângulos sucessivos, começando em N, são $a-ar = a(1-r)$, $ar-ar^2 = ar(1-r)$,..., e as alturas N, M, L, ... são $a^{-1} = 1/a$, $(ar)^{-1} = 1/ar$, $(ar^2)^{-1} = 1/ar^2$, ..., as áreas são portanto $a(1-r) \cdot 1/a = 1-r$, $ar(1-r) \cdot 1/ar = 1-r$, e assim por diante. Isto significa que, conforme a distância de 0 cresce geometricamente, as áreas correspondentes crescem em incrementos iguais — ou seja, *aritmeticamente* — e isso continua sendo verdade mesmo ao passarmos ao limite quando $r \to 1$ (ou seja, quando fazemos a transição dos retângulos discretos para a hipérbole contínua). Mas isso, por sua vez, implica que a relação entre a área e a distância é l*ogarítmica.* Mais precisamente, se denotarmos por *A(t)* a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$ (por conveniência geralmente escolhemos $x = 1$) até um ponto variável $x = t$, teremos $A(t) = \log t$. Um dos alunos de Saint-Vincent, Alfonso Anton de Sarasa (1618-1667), escreveu essa relação explicitamente[7], registrando uma das primeiras ocasiões em que se fez uso de uma *função* logarítmica, quando, até então, os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.[8]

Assim, a quadratura da hipérbole foi finalmente conseguida cerca de dois mil anos depois dos gregos, que primeiro enfrentaram o problema. Uma questão, entretanto, ainda permanecia aberta: a fórmula $A(t) = \log t$ de fato fornece a área sob a hipérbole como uma função de variável t, mas ainda não é adequada para a computação numérica porque nenhuma base é estabelecida.



of Religion. 155

Problem $\frac{n}{n-1} - 1 = a$, which gives $n = \frac{a+1}{a}$; so the Equation to the Hyperbola sought, is $\overline{yx}|^{\frac{a+1}{a}} = 1$.

Let (as before) AC, AH be the Asymtotes of any Hyperbola DLF defined by this Equation $yx^n = 1$, in which the Absciffa $AK = x$, and Ordinate $KL = y$, and n is suppofed either equal to, or greater than Unity. 1°. It appears that in all Hyperbola's the interminate Space $CAKLD$ is infinite, and the interminate Space $HAGLF$ (except in the *Apollonian* where $n = 1$) is finite. 2°. In every Hyperbola, one Part of it continually approaches nearer and nearer to the Afymptote AC, and the other part continually nearer to the other Afymptote AH; that is, LD meets with AC at a Point infinitely diftant from A, and LF meets with AH at a Point infinitely diftant from A.

3°. In two different Hyperbola's DLF, dlf, if we fuppofe n to be greater in the Equation of dlf, than it is in the Equation of DLF, then LD fhall meet fooner with AC than

M m 3 *l d*

Figura 22. Uma página do *Philosophical Principies of Religion,* de George Cheyene (Londres, 1734), discutindo a quadratura da hipérbole.

Para tornar a fórmula prática, precisamos nos decidir sobre uma base. Será que qualquer base serviria? Não, porque a hipérbole $y = 1/x$ e a área sob ela (digamos, a partir de $x = 1$) existem independentemente de qualquer escolha particular de base. (A situação é análoga ao círculo: nós sabemos que a relação geral entre a área e o raio é $A = kr^2$, mas não estamos livres para escolher o valor de k arbitrariamente.) Assim, deve existir alguma base "natural" que determine esta área numericamente. Como veremos no Capítulo 10, esta base é o número e.

ooo

Em meados do século XVII as principais idéias por trás do cálculo já eram razoavelmente bem conhecidas pela comunidade matemática[9]. O método dos indivisíveis, embora repousando em uma base incerta, tinha sido aplicado com sucesso a um conjunto de curvas e sólidos; e o método da exaustão de Arquimedes, em sua forma moderna, revisada, resolvera a quadratura da família de curvas $y = x^n$. Mas embora esses métodos fossem bem-sucedidos, eles ainda não estavam fundidos em um sistema único; cada problema exigia uma abordagem diferente e o sucesso dependia da engenhosidade geométrica, habilidades com a álgebra e uma boa dose de sorte. O que se precisava era de um procedimento geral e sistemático — um conjunto de algoritmos — que permitiriam resolver esses problemas com facilidade e eficiência. Este procedimento foi fornecido por Newton e Leibniz.

NOTAS E FONTES

1. Quando este livro estava às vésperas da impressão, foi anunciado que Andrew Wiles, da Universidade de Princeton, tinha finalmente demonstrado o teorema (*New York Times,* 24 de junho de 1993). Sua demonstração, de 200 páginas, ainda não foi publicada e deve ser examinada cuidadosamente antes que se possa considerar o problema solucionado. (Ver *O último teorema de Fermat,* de Simon Singh, Editora Record, 1998. (N.T.) {‡}
2. Ver Ronald Calinger, ed., *Classics of Mathematics* (Oak Park, [1], Moore Publishing Company, 1982), pp. 336-338.
3. John Wallis, a quem já mencionamos em relação ao seu produto infinito, chegou independentemente ao mesmo resultado, na mesma época que Fermat. A fórmula para inteiros positivos *n* já era conhecida por vários matemáticos anteriores, entre eles Bonaventura Cavalieri (c. 1598-1647), Gilles Pcrsonc dc Roberval (1602-1675) e

EvangelistaTorricelli (1608-1647) — todos pioneiros do método dos indivisíveis. Sobre este assunto, ver D. j. Struik, ed., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800* (Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1969), Gap. 4.

4. Na verdade, para $n = -m$ a equação 2 dá uma área com um sinal negativo; isso ocorre porque a função $y = x^n$ está aumentando quando $n > 0$ e diminuindo quando $n < 0$, à medida que nos movemos da esquerda para a direita. O sinal negativo, contido, não tem importância se considerarmos a área como um valor absoluto (exatamente como fazemos com a distância).
5. Ambos, Fermat eWallis, depois estenderam a equação 2 para o caso onde *n é* uma fração de *p/q*.
6. Calinger, ed., *Classics of Mathernatics,* p. 337.
7. Margaret E. Baron, *The Origins oftheInfinitesimálCalculus* (1969; reimpressão, Nova York; Dover, 1987), p. 147.
8. Sobre a história da área hiperbólica e sua relação com os logaritmos, ver Julian Lowell Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs* (1949, reimpressão Nova York: Dover, 1963), pp. 141-146,
9. As origens do cálculo diferencial serão discutidas no próximo capítulo.

8

O nascimento de uma nova ciência

Seu dom peculiar [de Newton] era a capacidade de manter continuamente em seu espirito um problema mental até que conseguisse enxergar através dele.

– JOHN MAYNARD KEYNES

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra, no dia de Natal (pelo calendário juliano) de 1642, o ano da morte de Galileu. Há um simbolismo nesta coincidência, já que, meio século antes, Galileu tinha estabelecido as fundações da mecânica, sobre as quais Newton construiria sua grande descrição matemática do universo. Nunca antes o verso bíblico "Uma geração vai e outra geração vem, mas a terra permanece para sempre" (Eclesiastes 1:4) foi mais profético.[1]

A infância de Newton foi marcada por desgraças familiares. Seu pai morreu alguns meses antes de Isaac nascer; a mãe logo casou-se novamente, mas logo perdeu também o segundo marido. O jovem Newton foi deixado sob a custódia de sua avó. Com 13 anos de idade foi mandado para a escola primária onde estudou grego e latim mas muito pouca matemática. Em 1661, Newton tornou-se estudante do Trinity College, na Universidade de Cambridge e sua vida nunca mais seria a mesma.

Como calouro ele estudou o currículo tradicional daquela época, que enfatizava fortemente o estudo de idiomas, história e religião. Não sabemos exatamente como seu interesse pela matemática começou. Newton estudou por conta própria os clássicos da matemática que encontrou: *Os elementos,* de Euclides, *La Géométrie,* de Descartes, a *Arithmetica infinitorum,* de Wallis, e os trabalhos de Viète e Kepler. Nenhum desses livros é leitura fácil mesmo hoje, quando a maioria dos fatos neles contidos é bem conhecida. Certamente não eram na época de Newton, quando a ciência matemática era um privilégio de muito poucos. O fato dele ter estudado esses trabalhos por conta própria, sem a ajuda de ninguém e tendo poucos amigos com quem pudesse partilhar seus pensamentos, criou as condições de sua futura personalidade como um gênio recluso, que necessitava de pouca inspiração externa para fazer grandes descobertas.[2]

Em 1665, quando Newton tinha vinte e três anos, um surto de peste fechou as escolas de Cambridge. Para a maioria dos estudantes isso significaria uma interrupção de seus estudos regulares, eventualmente até arruinando suas carreiras. Exatamente o oposto aconteceu com Newton. Ele voltou para sua casa em Lincolnshire e desfrutou de dois anos de completa liberdade para pensar e moldar suas idéias sobre o universo. Esses "anos primordiais" (em suas próprias palavras) foram os mais frutíferos de sua vida e mudariam o rumo da ciência.[3]

A primeira grande descoberta de Newton envolve as séries infinitas. Como vimos no Capítulo 4, a expansão $(a+b)^n$, quando n é um inteiro positivo consiste na soma de $n+1$ termos cujos coeficientes podem ser encontrados no triângulo de Pascal. No inverno de 1664/65, Newton estendeu essa expansão para o caso onde *n é* uma fração, e no outono seguinte para o caso onde n é negativo. Para esses casos, entretanto, a expansão envolve um número infinito de termos — ela se torna uma *série infinita.* Para perceber isto vamos escrever o triângulo de Pascal de uma forma um pouco diferente da usada anteriormente.

$n = 0$:	1	0	0	0	0	0	...
$n = 1$:	1	1	0	0	0	0	...
$n = 2$:	1	2	1	0	0	0	...
$n = 3$:	1	3	3	1	0	0	...
$n = 4$:	1	4	6	4	1	0	...

(Esta versão "escadaria" do triângulo apareceu primeiro em 1544 na *Arithmetica integra* de Michael Stifèl, um trabalho que já mencionamos no Capítulo 1.) Como devemos lembrar, a soma da entrada/e da entrada (j-1) em qualquer linha nos dá a entraday na fileira de baixo, formando um padrão

→↓. Os zeros no final de cada linha simplesmente indicam que a expansão *é* finita. Para lidar com o caso onde *n é* um inteiro negativo, Newton prolongou a tabela *para trás* (ou para cima no caso da nossa tabela) ao calcular a *diferença* entre a entrada *j* em cada linha e a entrada *j*-1 na fileira acima dela, formando o padrão ↑→. Sabendo que cada linha começa com o 1, obtemos o seguinte arranjo:

$n = -4$:	1	−4	10	−20	35	−56	84	....
$n = -3$:	1	−3	6	−10	15	−21	28	...
$n = -2$:	1	−2	3	−4	5	−6	7	...
$n = -1$:	1	−1	1	−1	1	−1	1	...
$n = 0$:	1	0	0	0	0	0	0	...
$n = 1$:	1	1	0	0	0	0	0	...
$n = 2$:	1	2	1	0	0	0	0	...
$n = 3$:	1	3	3	1	0	0	0	...
$n = 4$:	1	4	6	4	1	0	0	...

Como um exemplo, o 84 na fileira para *n* =-4 é a diferença entre o 28 abaixo dele e o-56 à sua esquerda: 28-(-56) =84. Uma conseqüência dessa extensão para trás é que, quando *n é* negativo, a expansão nunca termina; em vez de uma soma finita, obtemos uma série infinita.

Para lidar com o caso onde *n é* uma fração, Newton estudou cuidadosamente o padrão numérico no triângulo de Pascal até ser capaz de "ler entre as linhas" para interpolar os coeficientes quando *n* =1/2, 3/2, 5/2, e assim por diante. Por exemplo, para *n* =1/2 ele obteve os coeficientes 1, 1/2,-1/8, 1/16,-5/128, 7/256, …[4] Daí que a expansão de $(1+x)^{1/2}$ — isto é, de $\sqrt{}(1+x)$ — é fornecida pela série infinita $1+(1/2)x-(1/8)^{x2}+(1/16)^{x3}-(5/128)^{x4}+(7/256)^{x5}-+\ldots$

Newton não *demonstrou* sua generalização da expansão binomial para valores negativos e fracionários de *n;* ele meramente fez uma conjectura. Para confirmação, ele multiplicou a série de $(1+x)^{1/2}$ termo a termo por si mesma e descobriu, para sua satisfação, que o resultado era $1+x$.[5] E ele tinha outro indício de que estava no caminho certo. Para *n* =-1, os coeficientes no triângulo de Pascal são 1,-1, 1,-1,… Se usarmos esses coeficientes para expandir a expressão $(1+x)^{-1}$ em potências de x obteremos a série infinita

$1 - x + x^2 - x^3 + - \ldots$

Isto é simplesmente uma série geométrica infinita com termo inicial 1 e taxa comum $-x$. A álgebra elementar nos ensina que *desde que a taxa comum fique entre –1 e 1,* a série vai convergir precisamente para $1/(1+x)$. Assim Newton sabia que sua conjectura devia estar certa pelo menos neste caso. Ao mesmo tempo ela o advertia de que não poderia tratar uma série infinita do mesmo modo como uma soma finita, porque aqui a questão da convergência é crucial. Ele não usou a palavra *convergência* —, os conceitos de limite e convergência ainda não eram conhecidos —, mas estava bem ciente de que, para que seus resultados fossem válidos, o x devia ser suficientemente pequeno.

Newton então formulou sua expansão binomial da seguinte forma:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\cdot AQ + \frac{m-n}{2n}\cdot BQ + \frac{m-2n}{3n}\cdot CQ + \ldots,$$

onde A denota o primeiro termo da expansão (isto é, $P^{m/n}$), *B o* segundo termo e assim por diante (isto é, o equivalente da fórmula fornecida no Capítulo 4). Embora Newton possuísse esta fórmula desde 1665, ele só a enunciou em 1676, em uma carta para Henry Oldenburg, secretário da Sociedade Real, em resposta a um pedido de Leibniz por mais informações sobre o assunto. A relutância em publicar suas descobertas foi uma característica de Newton durante toda a vida, o que o levaria a uma amarga disputa sobre primazia com Leibniz.

Newton então usou seu teorema binomial para expressar as equações de várias curvas como séries infinitas, de variável x, ou, conforme diríamos hoje, como séries de potências em x. Ele considerou essas séries simplesmente como polinomiais, tratando-as de acordo com as regras comuns da álgebra. (Agora sabemos que essas regras nem sempre se aplicam a séries infinitas, mas Newton não estava ciente dessas dificuldades em potencial.) Ao aplicar a fórmula de Fermat $x^{n+1}/(n+1)$ a cada termo da série (em linguagem moderna, integração termo a termo), ele foi capaz de fazer a quadratura de muitas curvas novas.

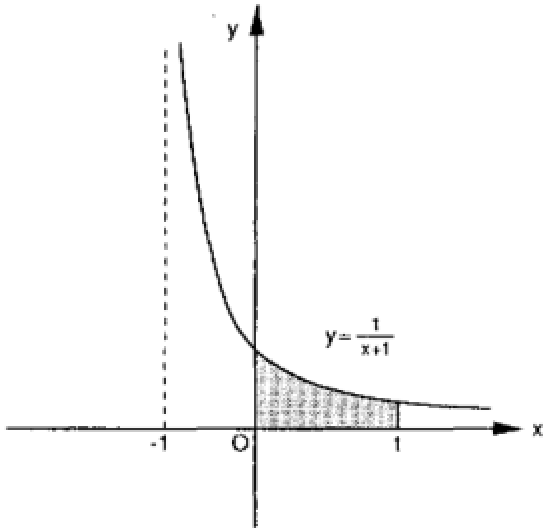


Figura 23. A área sob a hipérbole $y=1/(x+1)$, de $x=0$ a $x=t$ é dada por $\log(t+1)$.

De especial interesse para Newton era a equação $(x+1)y=1$ cujo gráfico é a hipérbole mostrada na figura 23 (que é idêntica ao gráfico de $xy=1$, mas deslocada de uma unidade para a esquerda). Se escrevermos esta equação como $y=1/(x+1)=(1+x)^{-1}$ e a expandirmos em potências de x, obteremos, como já foi visto, a série $1-x+x^2-x^3+-\ldots$ Newton conhecia a descoberta de Saint-Vincent de que a área delimitada pela hipérbole $y=1/x$, o eixo dos x e as ordenadas $x=1$ e $x=t$ é $\log t$. Isto significava que a área delimitada pela hipérbole $y=1/(x+1)$, o eixo dos x e as ordenadas $x=0$ e $x=t$ é $\log(t+1)$ (ver a fig. 23). Assim, ao aplicar a fórmula de Fermat a cada termo da equação:

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+-\ldots$$

e considerando o resultado como uma igualdade entre áreas, Newton encontrou a notável série

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+-\ldots.$$

Esta série converge para todos os valores de t no intervalo $-1 < t \leq 1$ e, em teoria, poderia ser usada para calcular os logaritmos de vários números, embora sua lenta taxa de convergência torne tais cálculos impraticáveis.[6] De modo bem típico, Newton não publicou sua descoberta, e desta vez ele tinha um bom motivo para isso. Em 1668 Nicolaus Mercator (c. 1620-1687)[7], que nascera em Holstein (então Dinamarca) e passara a maior parte de sua vida na Inglaterra, publicou um trabalho intitulado *Logarithmotechnia,* no qual esta série aparecia pela primeira vez (ela também foi descoberta, independentemente por Saint-Vincent). Quando Newton soube da publicação de Mercator, ele ficou muito desapontado, sentindo que o haviam privado do devido crédito. Pode-se supor que o incidente o levaria a apressar a publicação de suas descobertas no futuro, mas aconteceu exatamente o oposto. A partir daí, ele só confidenciaria seus trabalhos a um círculo fechado de amigos e colegas.

Houve um outro personagem na descoberta das séries de logaritmos. No mesmo ano em que Mercator publicou seu trabalho, William Brouncker (c. 1620-1684), um dos fundadores da Real Sociedade e seu primeiro presidente, mostrou que a área limitada pela hipérbole $(x+l)y=1$, o eixo dos x e as ordenadas $x=0$ e $x=1$ é fornecida pela série infinita 1-1/2+1/3-1/4+-…, ou, alternativamente, pela série 1/(1. 2)+1/(3. 4)+1/(5. 6)+… (esta última série pode ser obtida a partir da primeira somando-se os termos em pares). Seu resultado é o caso especial da série de Mercator para $t=1$. Brouncker realmente somou um número suficiente de termos da série para chegar ao valor 0,69314709, a qual ele reconheceu como sendo “proporcional” a log 2. Nós hoje sabemos que a proporcionalidade é sem dúvida uma igualdade, porque o logaritmo usado na quadratura da hipérbole é um logaritmo natural, ou seja, um logaritmo de base *e.*

A confusão quanto a quem descobriu primeiro a série de logaritmos é típica do período imediatamente anterior à invenção do cálculo, quando muitos matemáticos estavam trabalhando independentemente em idéias semelhantes, chegando aos mesmos resultados. Muitas dessas descobertas nunca foram publicadas oficialmente num lívro ou revista especializada mas circulavam em panfletos ou em correspondências pessoais enviadas a um pequeno grupo de colegas ou estudantes. O próprio Newton anunciou muitas de suas descobertas deste modo, uma prática que teria desagradáveis conseqüências para ele e para a comunidade científica em geral. Felizmente, nenhuma disputa séria sobre prioridade resultou no caso das séries logarítmicas, pois a mente de Newton já e voltara para uma descoberta de conseqüências muito maiores: o cálculo.

O nome "cálculo" é uma abreviação de "cálculo diferencial e integral" que, juntos, formam as duas maiores ramificações desta área (sendo também conhecido como cálculo infinitesimal). A palavra *cálculo* em si não tem relação alguma com este ramo particular da matemática. Em seu sentido genérico, significa qualquer manipulação sistemática de objetos matemáticos, sejam números ou símbolos abstratos. A palavra *calculus* pertence ao latim, significa pedra e sua associação com a matemática vem do uso de pedras para a contagem — uma versão primitiva do ábaco. (A raiz etimológica da palavra é *calc* ou *calx,* significando pedra calcária, de onde vem as palavras cálcio e giz (*chalk*, em inglês.) O significado restrito da palavra *cálculo* — ou seja, o cálculo diferencial e integral — *é* devido a Leíbniz. Newton nunca usou esta palavra, preferindo chamar sua invenção de "método de fluxões".

O cálculo diferencial é o estudo das mudanças ou, mais especificamente, das *taxas de mudança* de uma quantidade variável. A maioria dos fenômenos físicos ao nosso redor envolve quantidades que mudam com o tempo, tais como a velocidade de um carro em movimento, as leituras de temperatura de um termômetro ou a corrente elétrica fluindo em um circuito. Hoje nós chamamos tais quantidades de variáveis; Newton usava o termo *fluente.* O cálculo diferencial está relacionado à descoberta da taxa de mudança de uma variável, ou, para usar a expressão de Newton, a *fluxão* de um determinado fluente. Esta escolha de palavras revela o funcionamento de sua mente. Newton era tanto físico quanto matemático. Sua visão de mundo era dinâmica, onde tudo se encontrava num estado contínuo de movimento, causado por forças conhecidas. Esta visão, é claro, não se originou com Newton; tentativas de explicar todo o movimento pela ação de forças recuam até a antigüidade e chegaram ao seu clímax quando Galileu estabeleceu as fundações da mecânica ho início dos 1600. Mas foi Newton quem unificou o conjunto de fatos observacionais conhecidos em uma grande teoria, a lei da gravitação, que ele enunciou em sua *Philosophiae naturalisprincipia mathematica,* publicada pela primeira vez em 1687. Sua invenção do cálculo, embora não diretamente relacionada com o seu trabalho na física (ele raramente a usou em *Principia* e foi cuidadoso ao apresentar seu raciocínio em forma geométrica quando o fez)[8], foi sem dúvida influenciada por sua visão dinâmica do universo.

O ponto de partida de Newton foi considerar duas variáveis que se relacionavam através de uma equação, digamos $y = x^2$ (hoje chamamos esse tipo de relacionamento de *função,* e para indicar que y é uma função de x escrevemos $y = f(x)$). Tal relação é representada por um gráfico no plano xy, em nosso exemplo uma parábola. Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel $P(x, y)$. À medida que P traça a curva, ambas as coordenadas, x e y, variam continuamente com o tempo; imaginava-se o próprio tempo como "fluindo" a uma taxa uniforme — daí a palavra *fluente.* Newton então partiu para encontrar as taxas de mudança *de* x e y em relação ao tempo, isto é, suas fluxões. Ele conseguiu isso considerando a diferença, ou a mudança, nos valores de x e de y entre duas ocasiões "adjacentes", então, dividindo essa diferença pelo intervalo de tempo transcorrido. O passo final, e crucial, foi fazer o intervalo de tempo transcorrido igual a 0 — ou, mais precisamente, pensar nele como tão pequeno a ponto de ser desprezível.

Vejamos agora como isso funciona para a função $y = x^2$. Vamos considerar o pequeno intervalo de tempo Ɛ (Newton na verdade usou a letra *O,* mas como ela é muito semelhante ao zero vamos usar o Ɛ). Durante esse intervalo de tempo a coordenada x muda na quantidade x Ɛ, onde x é a notação de Newton para a taxa de mudança, ou fluxão, de x (esta ficou sendo conhecida como a "notação do ponto"). De modo semelhante, a mudança no y *é* $\dot{y}Ɛ$. Substituindo x por $x+\dot{x}Ɛ$, *e* y por $y+\dot{y}Ɛ$ na equação $y = x^2$, teremos $y+\dot{y}Ɛ = (x+\dot{x}Ɛ)^2 = x^2+2x(\dot{x}Ɛ)+(\dot{x}Ɛ)^2$. Mas, como $y = x^2$, podemos cancelar o y no lado esquerdo da equação com o x^2 no lado direito e obteremos $\dot{y}Ɛ = 2x(\dot{x}Ɛ)+(xƐ)^2$. Dividindo ambos os lado por Ɛ teremos $\dot{y} = 2x\dot{x}+x^{-2}Ɛ$. O passo final é fazer Ɛ igual a 0, o que nos deixa com $y = 2x\dot{x}$. Esta é a relação entre as fluxões dos dois fluentes, x e y, ou, em linguagem moderna, entre as taxas de mudança das variáveis x e y, cada uma considerada como uma função do tempo.

Newton deu vários exemplos de como funciona este "método das fluxões". O método é totalmente generalizado: pode ser aplicado a quaisquer dois fluentes que se relacionem um com o outro através de uma equação. Seguindo um procedimento como o que foi mostrado acima, obtemos uma relação entre as fluxões, ou, as taxas de mudança das variáveis originais. Como exercício, o leitor pode desenvolver um dos exemplos adotados por Newton, o exemplo da equação cúbica $x^3-ax^2+axy - y^3 = 0$. A equação resultante, que relaciona as fluxões de x e de *y* é:

$$3x^2\dot{x} - 2\,ax\dot{x}+ax\dot{y}+ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Esta equação é mais complicada que a da parábola, mas serve para o mesmo propósito: ela nos permite expressar a taxa de variação de *x* em termos da taxa de variação *dey e* vice-versa, para cada ponto *P(x,y)* da curva.

Mas existe mais no método das fluxões do que apenas encontrar as taxas de variação das variáveis em relação ao tempo. Se dividirmos a fluxão de *y* pela de *x* (isto é, se calcularmos a relação $\dot{y}/\dot{x}$), teremos a taxa de variação de *y em relação* a *x.* Esta última quantidade possui um significado geométrico; ela mede a inclinação da curva em cada um de seus pontos. Mais precisamente, a taxa $\dot{y}/\dot{x}$ *é* a *inclinação da linha tangente para a curva no ponto P(x, y),* onde por *inclinação* queremos mencionar a proporção em que a linha se eleva naquele ponto. Por exemplo, para a parábola $y = x^2$, encontramos ser a relação entre as duas fluxões $\dot{y} = 2x\dot{x}$, de modo que $\dot{y}/\dot{x} = 2x$. Isto significa que, para cada ponto *P(x,y),* na parábola, a linha tangente tem uma inclinação igual a duas vezes o valor da coordenada *x* naquele ponto. Se $x = 3$, a inclinação, ou proporção elevação-comprimento, é 6, e se $x = -3$, a inclinação é-6 (uma inclinação negativa significa que a curva está descendo à medida que nos movemos da esquerda para a direita). Se $x = 0$, a inclinação é 0 (isto significa que a parábola tem uma linha tangente horizontal em $x = 0$); e assim por diante (ver fig. 24).

Vamos enfatizar este último ponto. Embora Newton pensasse que *x e y* variavam com o tempo, ele terminou com uma interpretação puramente geométrica das fluxões, a qual não depende do tempo. Ele precisava da noção de tempo apenas como uma ajuda mental para cristalizar suas idéias. Newton então aplicou seu método a numerosas curvas encontrando suas inclinações, seus pontos mais altos e mais baixos (pontos de máximo e de mínimo), suas curvaturas (a taxa pela qual a curva muda de direção) e seus pontos de inflexão (onde a curva muda de côncava para convexa e vice-versa) — todas propriedades geométricas relacionadas com a linha tangente. Devido a esta associação com a tangente, o processo de encontrar a fluxão de um determinado fluente era conhecido, na época de Newton, como *problema da tangente.* Hoje chamamos esse processo de *diferenciação* e a fluxão de uma função chamamos de *derivada.* A notação do ponto de Newton também não sobreviveu, e atualmente usamos a notação diferencial muito mais eficaz de Leibniz, como veremos no próximo capítulo.

O método das fluxões de Newton não era uma idéia inteiramente nova.

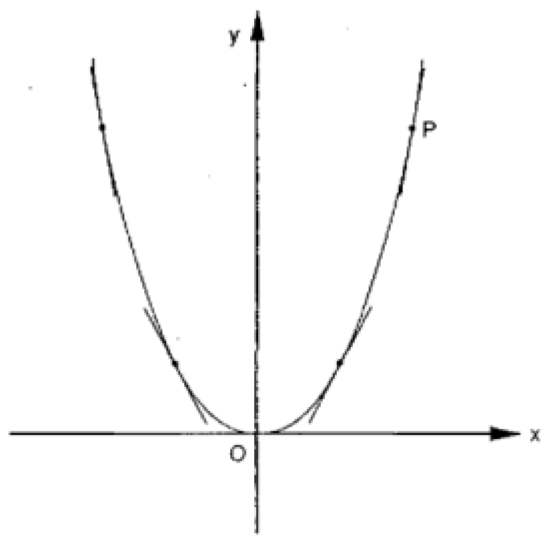


Figura 24. Linhas tangentes à parábola $y = x^2$.

Exatamente como a integração, ele estivera no ar durante algum tempo e ambos, Fermat e Descartes, o usaram em vários casos particulares. A importância da invenção de Newton é que ela forneceu um *procedimento geral* — um algoritmo — para se encontrar a taxa de mudança de praticamente qualquer função. A maioria das regras da diferenciação, que agora são parte dos cursos padrão de cálculo, foram descobertas por ele. Por exemplo, se $y = x^n$, então $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$ (onde n pode ter qualquer valor, positivo ou negativo, inteiro ou fracionário e até mesmo irracional). Seus predecessores abriram o caminho, mas foi Newton quem transformou suas idéias em uma ferramenta poderosa, universal, que logo seria aplicada com enorme sucesso em todos os ramos da ciência.

Newton em seguida considerou o *inverso* do problema da tangente: dada a fluxão, encontre o fluente. Falando de um modo geral, este é um problema mais difícil, exatamente como a divisão é uma operação mais difícil do que a multiplicação, ou a extração da raiz quadrada em relação ao quadrado. Em casos simples o resultado pode ser obtido por "palpite", como no exemplo seguinte. Dada a fluxão $\dot{y} = 2x\dot{x}$, encontre o fluente y. Uma resposta óbvia é $y = x^2$, mas $y = x^2+5$ também seria uma resposta, assim como x^2-8, ou, de fato x^2+c, onde c é qualquer constante. A razão para isto é que os gráficos de todas essas funções são obtidos a partir do gráfico de $y = x^2$, meramente deslocando-o para cima ou para baixo, resultando que eles possuem a mesma inclinação e qualquer valor dado de x (fig. 25). Assim, uma certa fluxão tem uma quantidade infinita de fluentes que a ela correspondem, diferindo entre si por cortantes arbitrárias.

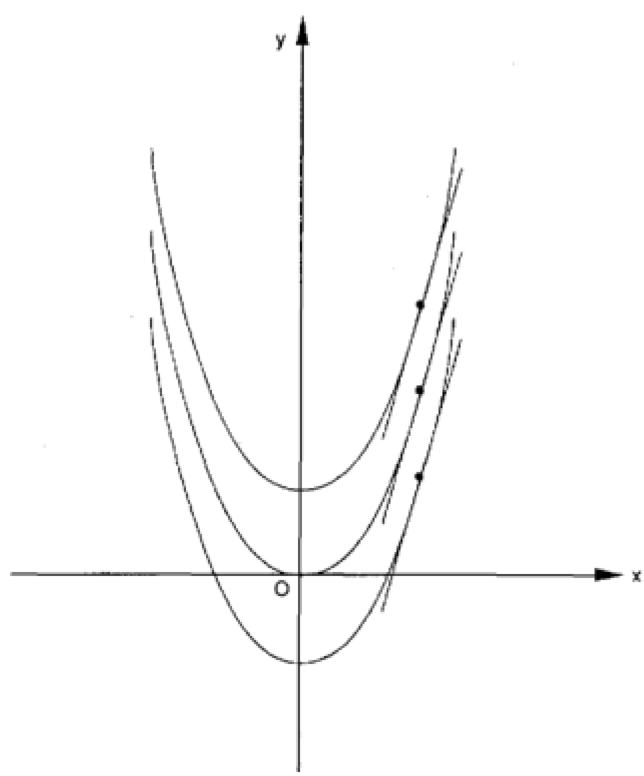


Figura 25. A inclinação da linha tangente permanece invariável quando a curva é deslocada para cima ou para baixo.

Tendo demonstrado que a fluxão de $y = x^n$ é $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$, Newton inverteu a fórmula, de modo que agora ela dizia: se a fluxão for $\dot{y} = x^n\dot{x}$ então o fluente (descontando-se a constante a ele somada) será $y = x^{n+1}/(n+1)$. (Podemos conferir este resultado através da diferenciação obtendo $\dot{y} = x^n\dot{x}$.) Esta fórmula também se aplica a valores fracionários assim como aos valores inteiros de *n.* Para dar apenas um dos exemplos de Newton, se $\dot{y} = x^{1/2}\dot{x}$, então $y = (3)x^{3/2}$, Mas a fórmula falha para $n = -1$, já que nesse caso o denominador torna 0. Este é o caso onde a fluxão é proporcional a $1/x$, o mesmo caso que desafiara Fermat em suas tentativas para obter a quadratura da hipérbole. Newton sabia (e logo veremos como) que o resultado neste caso envolvia logaritmos. Ele os chamou de "logaritmos hiperbólicos" para distingui-los dos logaritmos "comuns" de Briggs.

Hoje o processo de encontrar o fluente de determinada fluxão é chamado de *integração indefinida* ou *antidiferenciação,* e o resultado de integrar uma dada função é a sua integral indefinida, ou antiderivada (referindo-se "indefinida" à existência de uma constante arbitrária de integração). Mas Newton fez mais do que apenas fornecer regras para a diferenciação e a integração. Lembremos a descoberta de Fermat de que a área sob a curva $y = x^n$ de $x = 0$ até algum $x > 0$ é dada pela expressão $x^n+1/(n+1)$ — a mesma expressão que surge da antiderivaçao de $y = x^n$. Newton reconheceu que esta ligação entre a área e a antidiferenciação não é coincidência. Ele percebeu, em outras palavras, que os dois problemas fundamentais do cálculo, o problema da tangente e o problema da área, eram problemas *inversos.* Este *é* o ponto principal do cálculo diferencial e integral.

Dada uma função $y = f(x)$, podemos definir uma nova função $A(t)$, que representa a área sob o gráfico *de* $f(x)$, de um valor fixo de x determinado, digamos $x = a$, a algum valor variável $x = t$ (fig. 26). Vamos chamar esta nova função *de função de área* da função original. Trata-se de uma função de t, porque se mudarmos o valor de t — isto é, se movermos o ponto x =ípara a direita ou para a esquerda —, a área sob o gráfico também mudará. O que Newton percebeu resume-se em: *A taxa de mudança da função de área com relação até igual, em cada ponto $x = t$, ao valor da função original nesse ponto.* Ou enunciando em termos modermos, a derivada de $A(t)$ *é* igual a $f(t)$. Mas isso, por sua vez, significa que $A(t)$ é a *antiderivada de* $f(t)$.

Assim, para encontrarmos a área sob o gráfico de $y = f(x)$, deveremos encontrar uma antiderivada de $f(x)$, onde substituiremos a variável t por x. É nesse sentido que os dois processos — encontrar a área e encontrar a derivada — são opostos um do outro. Hoje em dia esta relação inversa é conhecida como o Teorema Fundamental do Cálculo. Como no caso do teorema binomial, Newton não fez uma demonstração formal do Teorema Fundamental, mas compreendeu plenamente a sua essência. A descoberta de Newton fundiu os dois ramos do cálculo — antes considerados como assuntos distintos e não relacionados — num único campo unificado. (Um resumo da demonstração do Teorema Fundamental pode ser encontrado no Apêndice 3.)

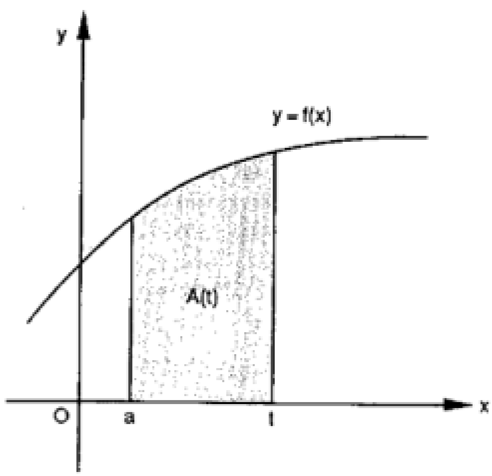


Figura 26. A área sob o gráfico de $y = f(x)$, de $x = a$ a $x = t$, é, ela própria, uma função de t chamada $A(t)$.

Vamos ilustrar isso com um exemplo. Suponha que desejamos encontrar a área sob a parábola $y = x^2$ de $x = 1$ a $x = 2$. Primeiro precisamos achar uma antiderivada *de* $y = x^2$. Já sabemos que as antiderivadas de x^2 (note o uso do plural neste ponto) são fornecidas por $y = x^3/3 + c$, de modo que nossa função de área é $A(x) = x^3/3 + c$. Para determinar o valor de c notamos que em $x = 1$ a área deve ser igual a 0, porque este é *o* ponto inicial do nosso intervalo; assim $0 = A(1) = 1^3/3 + c = 1/3 + c$, de modo que $c = -1/3$. Colocando este valor de volta na equação para $A(x)$, teremos $A(x) = x^3/3 - 1/3$. Finalmente, colocando $x = 2$ nesta equação encontraremos $A(2) = 2^3/3 - 1/3 = 8/3 - 1/3$

=7/3, a área pedida. Quando consideramos quanto trabalho seria necessário para chegar a tal resultado pelo método da exaustão, ou mesmo pelo método dos indivisíveis, podemos apreciar a enorme vantagem do cálculo integral.

ooo

A invenção do cálculo foi o evento singular mais importante da matemática desde que Euclides reunira a estrutura da geometria clássica em seus *Elementos,* dois mil anos antes. Ela mudaria para sempre o modo como os matemáticos pensam e trabalham e seus métodos poderosos afetariam todos os ramos da ciência, pura ou aplicada. E no entanto Newton, que tinha uma aversão ao envolvimento em controvérsias (ele já fora ferido por críticas sobre sua concepção da natureza da luz), não publicou sua invenção. Ele meramente a comunicou, de modo informal, aos seus alunos e colegas mais chegados em Cambridge. Em 1669, Newton escreveu uma monografia, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Da análise de equações com um número infinito de termos), que envíou para seu professor e colega de Cambridge Isaac Barrow. Barrow (1630-1677) era um professor lucasiano de matemática em Cambridge quando Newton lá chegou como estudante, e suas aulas sobre ótica e geometria muito influenciaram o jovem cientista. (Barrow sabia da relação inversa entre os problemas da área e da tangente mas não percebeu todo o seu significado, principalmente porque usava métodos estritamente geométricos, em contraste com a abordagem analítica de Newton.) Barrow renunciaria mais tarde ao seu prestigioso cargo a fim de que Newton pudesse ocupar sua cadeira, embora um motivo mais provável fossem suas aspirações para se envolver na vida política e administrativa do colégio (algo que um ocupante da cadeira estava proibido de fazer). Encorajado por Barrow, Newton escreveu, em 1671, uma versão melhorada de sua invenção, *De methodis serierum etfittxionum* (Sobre o método das série e fluxões). Um resumo deste importante trabalho só foi publicado em 1704, e mesmo então apenas como um apêndice ao maior trabalho de Newton, *Opticks* (a prática de anexar a um livro um apêndice sobre assunto não relacionado com o tópico principal era muito comum naquela época). Somente em 1736, nove anos após a morte de Newton, aos 85 anos, a primeira apresentação completa do assunto foi publicada em forma de livro.

Assim, por mais de meio século, o mais importante desenvolvimento da matemática moderna permaneceu conhecido, na Inglaterra, apenas por um pequeno grupo de acadêmicos e estudantes reunidos em Cambridge. No continente europeu, o conhecimento do cálculo — e a capacidade de usá-lo — ficou, de início, restrito a Leibniz e aos dois irmãos Bernoulli.[9] Por isso, quando Leibniz, um dos principais filósofos e matemáticos da Europa, publicou sua própria versão do cálculo em 1684, poucos matemáticos no continente duvidaram de que sua invenção fosse original. Somente vinte anos depois é que surgiram dúvidas quanto a se Leibniz teria tomado algumas das idéias de Newton. Todas as conseqüências da relutância de Newton agora tornavam-se evidentes. A disputa de prioridade enviou ondas de choque que reverberariam por toda a comunidade científica durante os duzentos anos seguintes.

NOTAS E FONTES

1. Todos os aspectos da vida e do trabalho do mais famoso matemático da era moderna foram totalmente pesquisados e documentados. Por este motivo nenhuma fonte de referência específica será dada neste capítulo para as descobertas matemáticas de Newton. Entre os muitos trabalhos sobre Newton, talvez o mais importante seja *NeveratRest: A Biograpky of Isaac Newton,* de Richard S. Westfall (Cambridge, Cambridge University Press, 1980), que contém um extenso ensaio bibliográfico, e *The Mathematical Papers of Isaac Newton,* organizado por D, T. Whiteside, 8 volumes (Cambridge, Cambridge Universitiy Press, 1967-84).
2. Lembramos de outro recluso em época mais recente. Albert Einstein. No final de suas vidas, tanto Newton quanto Einstein tornaram-se figuras públicas proeminentes, envolvendo-se em questões políticas e sociais à medida que sua produção científica encolhia. Aos cinqüenta e quatro anos, Newton foi convidado e aceitou assumir o posto de diretor da Casa da Moeda e aos 61 foi eleito presidente da Sociedade Real, uma

posição que manteve pelo resto de sua vida. Aos 73 anos, Einstein foi convidado para assumir a presidência do estado de Israel, uma honra que ele recusou.

3. Novamente nos lembramos de Einstein, que moldou sua teoria especial da relatividade enquanto desfrutava do isolamento proporcionado pelo modesto emprego no Escritório de Patentes em Berna, na Suíça.
4. Esses coeficientes podem ser escritos como 1, 1/2, – 1/(2. 4), (1. 3)/(2. 4 . 6) , – (1. 3. 5)/(2. 4. 6-8),…
5. Newton realmente usou a série para $(1-x^2)^{1/2}$, que pode ser obtida da série para $(1+x)^{1/2}$ substituindo-se x por $-x^2$ em cada termo. Seu interesse nesta série em especial deriva do fato de que a função $y=(1-x^2)^{1/2}$ descreve a metade superior do círculo unitário $x^2+y^2=1$. A série já era conhecida por Wallis.
6. Contudo uma variante desta série, $\log (1+x)/(1-x) = 2(x+x^3/3+x^5/5+\ldots)$ para $-1 < x < 1$, converge muito mais rapidamente.
7. Ele não tem nenhum parentesco com o cartógrafo flamengo Gerhardus Mercator (15121594), inventor da famosa projeção de mapas que leva o seu nome.
8. Para saber os motivos, ver *A Short Account ofthe History of Mathematics* de W W. Rouse Bali (1908, reimpressão Nova York: Dover, 1960), pp. 336-337.
9. Idem, pp. 369-370. Novamente nos lembramos de Einstein, cuja teoria da relatividade geral teria sido entendida apenas por dez cientistas quando foi publicada em 1916.

9

A grande controvérsia

Se devemos nos restringir a um único sistema de notação, então resta pouca dúvida de que o inventado por Leibniz é mais adequado para a maioria dos propósitos a que se aplica o cálculo infinitesimal do que as fluxões. E para algumas aplicações (como o cálculo de variações) sua notação ê de fato quase essencial.

– W. W. ROUSE BALL, *A Short Account of the History of Mathematics* (1908)

Newton e Leibniz serão sempre mencionados juntos como co-invenrores do cálculo. Em suas personalidades, entretanto, os dois homens não poderiam ser mais diferentes. O barão Gottfried Wilhelm von Leibniz (ou Leibnitz) nasceu em Leipzig, no dia 1º de julho de 1646. Filho de um professor de filosofia, o jovem Leibniz logo demonstrou uma grande curiosidade intelectual. Seus interesses, além da matemática, cobriam uma ampla variedade de tópicos, entre eles idiomas, literatura, direito, e acima de tudo a filosofia. (Os interesses de Newton fora da matemática e da física eram a teologia e a alquimia, assuntos aos quais dedicou quase tanto tempo quanto ao seu trabalho científico mais familiar.) Ao contrário do recluso Newton, Leibniz era um homem sociável que adorava a companhia das pessoas e apreciava os prazeres da vida. Ele nunca se casou, o que é talvez a única característica que partilhava com Newton — além, é claro, de seu interesse em matemática.

Entre as’contribuições de Leibniz para a matemática devemos mencionar, além do cálculo, seu trabalho em análise combinatória, seu reconhecimento do sistema binário de numeração (sistema que usa apenas dois digitos, 0 e 1, base para os computadores atuais) e sua invenção de uma máquina calculadora capaz de somar e multiplicar (trinta anos antes dele, Pascal tinha construído uma máquina capaz apenas de somar). Como filósofo, acreditava em um mundo racional no quai tudo seguiria a razão e a harmonia. Leibniz tentou desenvolver um sistema formal de lógica no qual todas as deduções poderiam ser feitas como em algoritmos computacionais. Sua idéia foi adotada, quase dois séculos depois, pelo matemático inglês George Boole (1815-1864), que fundou o que agora se conhece como lógica simbólica. Podemos notar um fio comum, uma preocupação com o simbolismo formal, passando através de seus vários interesses. Na matemática uma boa escolha dos símbolos — um sistema de notação — é quase tão importante quanto o assunto que eles representam, e o cálculo não é exceção. Como veremos, a proficiência de Leibniz no simbolismo formal deu ao seu cálculo uma vantagem sobre o método de fluxões de Newton.

Leibniz começou sua carreira na diplomacia e no direito. O governo em Mainz o empregou em ambas as capacidades, enviando-o para o exterior em várias missões. Em 1670, com a Alemanha tomada pelo medo de uma invasão comandada por Luís XIV, da França, o diplomata Leibniz apresentou uma estranha idéia: desviar a atenção da França da Europa, deixando-a tomar o Egito, de onde poderia atacar as possessões holandesas no sudeste da Ásia. Esse plano não ganhou a aprovação do governo, mas um esquema semelhante foi adotado, mais de um século depois, quando Napoleão Bonaparte invadiu o Egito.

Apesar da tensão nas relações com a França, Leibniz foi para Paris em 1672 e pelos quatro anos seguintes absorveu todas as amenidades sociais e intelectuais que a bela cidade podia oferecer. Lá ele encontrou-se com Christian Huygens (1629-1695), o principal físico matemático da Europa, que encorajou Leibniz a estudar geometria. Então, em janeiro de 1673, ele foi enviado a Londres, em missão diplomática, onde se encontrou com vários colegas de Newton, entre eles Henry Oldenburg (c. 1618-1677) secretário da Sociedade Real, e com o matemático John Collins (1625-1683). Durante uma segunda breve visita em 1676, Collins mostrou a Leibniz uma cópia do *De analysi,* de Newton, que obtivera de Isaac Barrow (ver pág. 110). Esta última visita tor-nar-se-ia mais tarde o foco da disputa de prioridade entre Newton e Leibniz

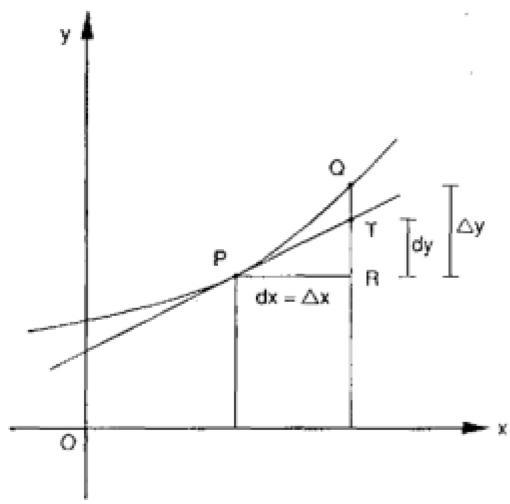


Figura 27. O triângulo característico *PRT* de Leibniz. A proporção *RT/PR* ou *dy/dx* é a inclinação da linha tangente para a curva em *P.*

Leibniz concebeu seu cálculo diferencial e integral por volta de 1675 e em 1677 já tinha um sistema plenamente desenvolvido e funcional. Desde o começo sua abordagem era diferente da de Newton. Como vimos, as idéias de Newton eram baseadas na física; ele considerava a fluxão como uma taxa de mudança, ou velocidade, de um ponto cujo movimento contínuo gerava a curva $y = f(x)$. Leibniz, que estava mais próximo da filosofia do que da física, moldou suas idéias de um modo muito mais abstrato. Ele pensava em termos de *diferenciais,* pequenos acréscimos nos valores das variáveis x e y.

A figura 27 mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$ *e* um ponto *P(x,y)* sobre ela. Nós traçamos a linha tangente ao gráfico em *P* e nele consideramos um ponto vizinho 71 Isto nos dá o pequeno triângulo *PRT* que Leibniz chamou de *triângulo característico;* seus lados *PR* e *RT* são os aumentos nas coordenadas *x* e *y* quando nos deslocamos de *P* para *T.* Leibniz chamou esses aumentos de *dx* e *dy* respectivamente, Ele então argumentou que *se dx* e *dy* fossem suficientemente pequenos, a linha tangente ao gráfico em *P* seria quase idêntica ao próprio gráfico na vizinhança de *P.* Mais precisamente, o segmento de linha *PT* vai quase coincidir exatamente com o segmento *curvo PQ,* onde *Q* é um ponto no gráfico diretamente acima ou abaixo de *T.* Para encontrarmos a inclinação da linha tangente em *P,* só precisamos achar a proporção al-tura-Iargura do triângulo característico, isto é, a taxa *dy/dx.* Leibniz então raciocinou que, como *dx* e *dy* são quantidades pequenas (às vezes pensava nelas como infinitamente pequenas), sua relação representa não apenas a inclinação da linha tangente em *P,* mas também a inclinação do *gráfico* em *P.* A proporção *dy/dx é,* portanto, o equivalente de Leibniz para a fluxão de Newton ou a taxa de mudança da curva.

Existe uma falha fundamental neste argumento. A linha tangente, embora quase idêntica a curva, perto de *P,* não *coincide* com ela. As duas só coincidiriam se os pontos *P* e *T* coincidissem, isto é, quando o triângulo característico encolhesse até se tornar um ponto. Mas então ambos os lados, *dx* e *dy* se tornariam 0 e sua proporção seria a expressão indeterminada 0/0. Hoje nós contornamos esta dificuldade definindo a inclinação como um *limite.* Voltando a figura 27, escolhemos dois pontos vizinhos *P* e *Q,* ambos *no gráfico* e chamamos os lados *PR* e *RQ,* da forma *PRQ,* semelhante a um triângulo (na verdade uma forma curva) de Δx e Δy, respectivamente. (Note que Δx é igual a *dx,* mas Δ*y é* ligeiramente diferente de *dy.* Na figura 27, Δy *é* maior do que *dy* porque *Q* está acima de *T.* Agora, a proporção altura-comprimento no gráfico entre *P e Q é* Δy/Δx. Se permitirmos que ambos, Δx e Δy, se aproximem de 0, sua relação se aproximará de um certo valor limite, e é este limite que chamamos hoje de *dy/dx.* Ou em símbolos, *dy/dx* $=\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x)$.

Vamos resumir. O que Leibniz chamou de *dy/dx* e pensou como uma proporção entre dois pequenos acréscimos, escreve-se hoje em dia como Δy/Δx. Geometricamente, a proporção Δy/Δx — chamada de quociente diferencial — é a inclinação da linha*secante* entre *Pe Q* (ver a fig. 28). À medida que Δx se aproxima de 0, o ponto *Q* se move para trás em direção a A ao longo do gráfico, fazendo com que a linha secante gire levemente até que, no limite, ela coincidirá com a linha tangente[1]. E é a inclinação desta última que nós representamos por *dy/dx* e chamamos de *derivada de y em relação a x.*[2]

Como vimos, o conceito de limite é indispensável para definir a inclinação, ou a taxa de variação, de uma função. Mas na época de Leibniz o conceito de limite ainda não era conhecido; a distinção entre uma proporção entre duas quantidades finitas, ainda que pequenas, e o *limite* dessa proporção quando as duas quantidades tendem a 0, causou muita confusão e levantou sérias dúvidas sobre as bases do cálculo diferencial. Essas questões só foram completamente resolvidas no século XIX, quando o conceito de limite foi estabelecido em bases sólidas.

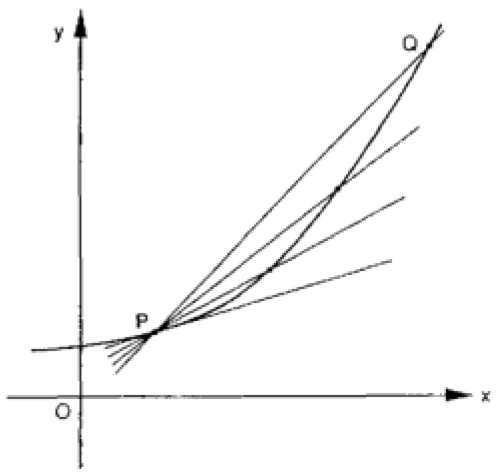


Figura 28. À medida que o ponto *Q* move-se em direção ao ponto *P*, as linhas secantes *PQ* se aproximam da linha tangente em *P*.

Para ilustrar como a idéia de Leibniz funciona, vamos encontrar a derivada da função $y = x^2$, usando a notação moderna. Se x aumenta por uma quantidade Δx, o aumento correspondente em y será $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2$, o que, depois de expandirmos e simplificarmos, se tornará $2x\Delta x+(\Delta x)^2$. O coeficiente diferencial $\Delta y/\Delta x$ será portanto igual a $[2x\Delta x+(\Delta x)^2]/\Delta x = 2x+\Delta x$. Se deixarmos Δx tender para 0, $\Delta y/\Delta x$ tenderá para $2x$ e é esta última expressão que chamamos de dy/dx. Tal resultado pode ser generalizado: Se $y = x^n$ (onde n pode ser qualquer número), então $dy/dx = nx^{-n-1}$. Tal resultado *é* idêntico ao que Newton obteve usando seu método de fluxões.

O passo seguinte de Leibniz foi deduzir regras gerais para operar com a derivada dy/dx para várias combinações de funções. Hoje em dia elas são conhecidas como regras de diferenciação e formam o núcleo de qualquer curso padrão de cálculo. Aqui vamos resumir essas regras usando a notação moderna.

1. A derivada de uma constante é 0. Isto é uma conseqüência

clara do fato de que o gráfico de uma função constante é uma linha reta horizontal cuja inclinação em qualquer ponto é 0.

2. Se uma função for multiplicada por uma constante, só precisamos diferenciar a função e multiplicar o resultado pela constante. Em símbolos, se $y = ku$, onde $u = f(x)$, então $dy/dx = k(du/dx)$. Por exemplo, se $y = 3x^2$, então $dy/dx = 3.(2x) = 6x$.
3. Se y for a soma de duas funções $u = f(x)$, e $v = g(x)$, sua derivada será igual à soma das derivadas das funções individuais. Em símbolos, se $y = u+v$, então, $dy/dx = du/dx+dv/dx$. Por exemplo, se $y = x^2+x^3$, então $dy/dx = 2x+3x^2$. Uma regra semelhante é verdadeira para a diferença entre duas funções.
4. Se y é o produto de duas funções, $y = uv$, então $dy/dx = u(dv/dx)+v(du/dx)^3$. Por exemplo, se $y = x^3(5x^2 - 1)$, então $dy/dx = x3.(10x)+(5x^2 - 1).(3x^2) = 25x^4 - 3x^2$ (poderíamos, é claro, obter o mesmo resultado escrevendo $y = 5x^5 - x^3$ e diferenciando cada termo separadamente). Uma regra ligeiramente mais complicada vale para a divisão de duas funções.
5. Suponha que y é função de uma variável x e que x é função de outra variável t (tempo, por exemplo); em símbolos escrevemos $y = f(x)$ e $x = g(t)$. Isto significa que y é uma função indireta, ou *uma função composta* de t: $y = f(x) = f[g(t)]$. Agora, a derivada de y em relação a t pode ser encontrada pela multiplicação das derivadas das duas funções componentes: $dy/dt = (dy/dx).(dx/dt)$. Esta é a famosa "regra da cadeia". Superficialmente, parece ser nada mais do que a regra familiar de cancelamento de frações, mas precisamos nos lembrar de que as "proporções" dy/dx e dx/dt são na verdade os *limites* das proporções, obtidas ao se fazer o numerador e o denominador em cada uma tender para 0. A regra da cadeia mostra a grande utilidade da notação de Leibniz: podemos manipular o símbolo dy/dx como se ele fosse realmente uma proporção entre duas quantidades. A notação fluxional de Newton não tem o mesmo poder

sugestivo.

Para ilustrar o uso da regra da cadeia, suponha que $y = x^2$ e $x = 3t + 5$. Para encontrar *dy/dt,* nós simplesmente procuramos as derivadas "componentes" *dy/dx* e então as multiplicamos. Temos $dy/dx = 2x$ e $dx/dt = 3$, de modo que $dy/dt = (2x).\ 3 = 6x = 6(3t+5) = 18t+30$. É claro que poderíamos ter chegado ao mesmo resultado substituindo a expressão $x = 3t+5$ em y e expandindo o resultado, e a seguir diferenciando-o termo a termo: $y = x^2 = (3t+5)^2 = 9t^2+30t+25$, de modo que $dy/dt = 18t+30$. Neste exemplo os dois métodos são igualmente longos, mas se no lugar de $y = x^2$ nós tivéssemos, digamos $y = x^5$, uma computação direta de *dy/dt* seria bem longa enquanto a aplicação da regra da cadeia seria tão simples quanto para $y = x^2$.

Vamos ilustrar como essas regras podem ser usadas para resolver um problema prático. Um navio deixa o porto ao meio-dia, rumando para oeste a 10 milhas por hora. Um farol está localizado a cinco milhas ao norte do porto. À uma hora da tarde, a que velocidade o navio estará se afastando do farol? Chamando de x a distância entre o farol e o navio na hora t (fig. 29), nós teremos, pelo teorema de Pitágoras $x^2 = (10t)^2+5^2 = 100t^2+25$. Pela regra da cadeia teremos $dx/dt = (dx/du).\ (dx/du) = (1/2u^{-1/2}).\ (200t) = 100t.\ (100t^2+25)\text{-}^{1/2} = 100t/\sqrt{}(100t^2+25)$. À uma hora da tarde temos $t = 1$, resultando em uma taxa de variação de $100/\sqrt{125} \approx 8{,}944$ milhas por hora.

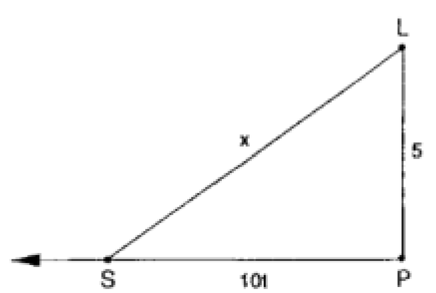
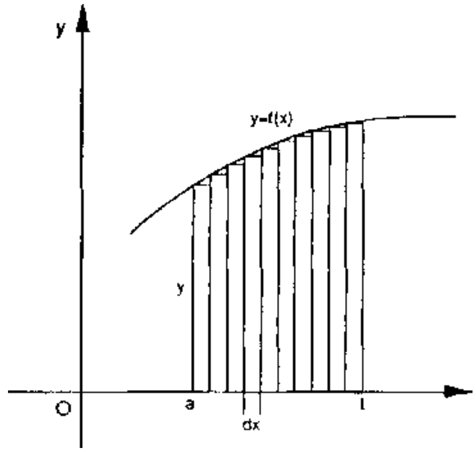


Figura 29. Um dos numerosos problemas que podem ser resolvidos facilmente com a ajuda do cálculo: encontrar a velocidade com que o navio *S,* viajando em uma dada direção e com uma dada velocidade, afasta-se do farol *L.*

A segunda parte do cálculo **é** o cálculo integral, e aqui, novamente a notação de Leibniz mostrou-se superior à de Newton. Seu símbolo para a antiderivada de uma função $y = f(x)$ é $\int y\,dx$, onde o *S* alongado é chamado de *integral* (indefinida) (o dx indica meramente que a variável de integração é x). Por exemplo, $\int x^2\ dx = x^3/3+c,$ como pode ser verificado diferenciando o resultado. A constante somada c provém do fato de que qualquer função dada tem um número infinito de antiderivadas, obtidas a partir da adição de uma constante arbitrária (ver p. 106), daí o nome de integrai "indefinida".

Exatamente como tinha feito com a diferenciação, Leibniz desenvolveu um conjunto de regras formais para a integração. Por exemplo, se $y = u+v$, onde u e v são funções de x, então $\int ydx = \int udx+\int vdx$, e de modo semelhante para $y = u-v$. Essas regras podem ser comprovadas diferenciando-se o resultado, do mesmo modo que o resultado de uma subtração pode ser conferido por uma soma. Infelizmente não existe regra geral para a integração do produto de duas funções, o que torna a integração um processo muito mais difícil do que a diferenciação.

O conceito de integração de Leibniz diferia do de Newton não somente na notação. Onde Newton via a integração como o inverso da diferenciação (conhecida uma fluxlo, encontrar o fluente), Leibniz começou com o problema da área: conhecida uma função $y = f(x)$, encontre a área sob o gráfico de $f(x)$ a partir de algum valor fixo de x, digamos $x = a$ até um valor variável $x = t$. Ele imaginou esta área como a soma de muitas faixas estreitas, de largura dx e alturas y, que variam com x, de acordo com a equação $y = f(x)$ (fig. 30). Somando as áreas dessas tiras ele conseguia a área total sob o gráfico: $A = \int y dx$. Seu símbolo para a integração lembra um S alongado (de "soma"), exatamente como seu símbolo de diferenciação d, simboliza "diferença".



Como vimos anteriormente, a idéia de encontrar a área de uma determinada forma, considerando-a como a soma de um grande número de formas pequenas, originou-se entre os gregos e Fermat usou-a com sucesso na quadratura da família de curvas $y = x^n$. Mas foi o Teorema Fundamental do Cálculo — a relação inversa entre diferenciação e integração — que transformou o novo cálculo em uma ferramenta tão poderosa. O crédito por esta formulação pertence apenas a Newton e Leibniz. Como vimos no Capítulo 8, o teorema envolve a área sob o gráfico *de* $f(x)$.

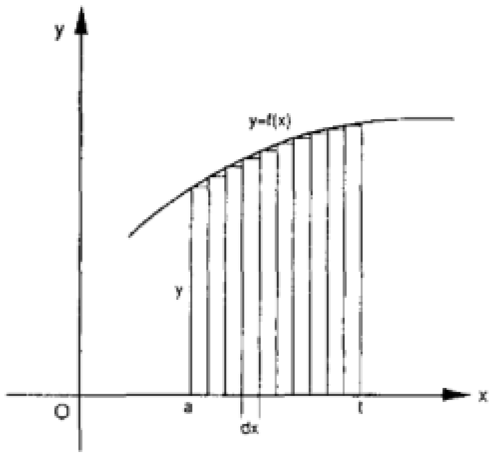


Figura 30. Leibniz considerava a área sob o gráfico de $y = f(x)$ como a soma de um grande número de retângulos estreitos, cada um com uma base dx e uma altura $y = f(x)$.

Denotando esta área por $A(x)$ (porque ela é em si uma função de x)[4], o teorema diz que a taxa de variação, ou derivada de $A(x)$, em cada ponto x *é* igual a $f(x)$; em símbolos escrevemos $dA/dx = f(x)$. Mas isto, por sua vez, implica que $A(x)$ *é* uma *antiderivada* de $f(x)$: $A(x) = \int f(x)dx$. Essas duas relações inversas são o núcleo de todo o cálculo diferencial e integral. Em notação abreviada podemos escrevê-las como:

$$\frac{dA}{dx} = y \Leftrightarrow A = \int y dx.$$

Aqui o y *é* uma forma resumida de $f(x)$ e o símbolo <=> ("se, e somente se") significa que cada declaração implica na outra (isto é, as duas afirmações são equivalentes). Newton também chegou ao mesmo resultado, mas foi a notação superior de Leibniz que expressou a relação inversa entre diferenciação e integração (isto é, entre os problemas da tangente e da área) de modo tão claro e conciso.

No Capítulo 8 nós demonstramos o uso do Teorema Fundamental para encontrar a área sob o gráfico de $y = x^2$ de $x = 1$ até $x = 2$ (pág. 109). Vamos repetir esse exemplo usando a notação de Leibniz e considerando a área de $x = 0$ até $x = 1$. Nós temos $A(x) = \int x^2\, dx = x^3/3 + c$. Agora $A(0) = 0$, já que $x = 0$ é o ponto inicial de nosso intervalo; assim $0 = 0^3/0 + c$, daí que $c = 0$. Nossa função de área é, portanto, $A(x) = x^3/3$ e a área pedida é $A(1) = 1^3/3 = 1/3$. Na notação moderna escrevemos isso como $A = {}_0\int^{1} x^2\, dx = (x^3/3)_{x=1} - (x^3/3)_{x=0} = 1^3/3 - 0^3/3 = 1/3$.[5] Assim, quase sem esforço, chegamos ao mesmo resultado que custou tanta engenhosidade e trabalho a Arquimedes, pelo método da exaustão (pág. 65).[6]

Leibniz publicou seu cálculo diferencial no número de outubro de 1684 da *Acta eruditorum,* a primeira revista científica alemã, que ele e seu colega Otto Mencke tinham fundado dois anos antes. Seu cálculo integral foi publicado na mesma revista dois anos depois, embora o termo *integral* só tenhã sido adotado em 1690 (por Jakob Bernoulli, sob o qual, adiante, teremos mais a dizer).

ooo

Desde 1673 Leibniz estivera se correspondendo com Newton por intermédio de Henry Oldenburg. Dessa correspondência Leibniz tivera um vislumbre, apenas um vislumbre, do método de fluxões de Newton. Newton, com sua mania de segredo, só sugerira, vagamente, que tinha descoberto um método novo para encontrar tangentes e quadraturas de curvas algébricas. Em resposta a um pedido de Leibniz por mais detalhes, Newton, depois de muita insistência da parte de Oldenburg e Collins, respondeu de um modo que era comum naquela época: enviou para Leibniz um anagrama — mensagem codificada, com letras misturadas —, uma mensagem que ninguém poderia decodificar, mas que, mais tarde, poderia servir como "prova" de que ele fora o descobridor.

6*accdoe*13*eff*7*i*3*l*9*n*4*o*4*qrr*4*s*8*t*12*vx*,

Este famoso anagrama fornece o número das diferentes letras na frase em latim "Data aaquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones ínvenire: et vice versa" (Dada uma equação envolvendo qualquer número de quantidades fluentes, para encontrar as fluxões e vice-versa).

Newton enviou uma carta para Oldenburg em outubro de 1676 com um pedido de que seu conteúdo fosse transmitido a Leibniz. Leibniz a recebeu no verão de 1677 e imediatamente respondeu, novamente através de Oldenburg, com um resumo completo de seu próprio cálculo diferencial. Ele esperava que Newton replicasse com igual abertura, mas Newton, suspeitando cada vez mais de que sua invenção poderia ser tomada por outros, recusou-se a continuar com a correspondência.

Não obstante, as relações entre os dois continuaram cordiais; eles respeitavam o trabalho um do outro e Leibniz não poupou elogios ao seu colega: "Se considerarmos a matemática do começo do mundo até a época de Newton, então o que ele fez é uma boa parte."[7] Mesmo a publicação do cálculo de Leibniz em 1684 não afetou imediatamente o seu relacionamento. Na primeira edição do *Principia* (1687), seu grande tratado sobre os princípios da mecânica, Newton reconheceu a contribuição de Leibniz — mas acrescentou que o método de Leibniz "pouco difere do meu, exceto na forma das palavras e dos símbolos".

Pelos vinte anos seguintes o relacionamento entre os dois permaneceu mais ou menos inalterado. Em 1704, a primeira publicação oficial do método das fluxões de Newton apareceu em um apêndice da sua *Opticks.* No pre-fácio para esse apêndice, Newton menciona a carta enviada em 1676 para Leibniz, acrescentando que "há alguns anos eu emprestei um manuscrito contendo tais teoremas [sobre o cálculo]; e desde então tenho encontrado algumas partes copiadas desse manuscrito que agora torno público". Newton, é claro, estava se referindo à segunda visita de Leibniz a Londres, em 1676, quando Collins mostrara a ele uma cópia do *De analysi.* Esta sugestão velada de que Leibniz copiara as idéias de Newton não passou despercebida. Em uma resenha anônima de um tratado anterior de Newton, sobre a quadratura, publicada no *Acta eruditorum* em 1705, Leibniz lembrou a seus leitores que "os elementos deste cálculo foram apresentados publicamente por seu inventor, Dr. Wilhelm Leibniz, nesta *Acta".* Embora não negasse que Newton tivesse inventado seu cálculo fluxional independentemente, Leibniz afirmou que as duas versões do cálculo diferiam apenas na notação, e não em sua substância, implicando que, de fato, fora Newton quem se apropriara de suas idéias.

Isso era demais para os amigos de Newton que agora se uniam para defender sua reputação. (O próprio Newton permaneceu nos bastidores durante essa fase.) Eles acusaram abertamente a Leibniz de ter tirado suas idéias do trabalho de Newton. O argumento mais efetivo era a cópia do *De analysi*. Embora Newton discuta o cálculo fluxional apenas brevemente neste tratado (a maior parte dele lida com as séries infinitas), o fato de que Leibniz não apenas o vira durante sua visita a Londres em 1676, mas também fizera anotações extensas ao lê-lo, o expunha à acusação de que, realmente, tinha usado as idéias de Newton em seu trabalho.

As acusações agora iam e vinham sobre o Canal da Mancha e logo a discussão tornou-se mais exaltada. Mais pessoas entraram na disputa, algumas com a verdadeira intenção de defender a reputação de seus respectivos mentores, outras querendo resolver disputas pessoais. Como era de esperar, Newton recebeu apoio unânime na Grã-Bretanha, enquanto a Europa continental ficou ao lado de Leibniz. Um dos mais dedicados defensores de Leibniz foi Johann Bernoulli, irmão de Jakob. Os dois Bernoullis foram os principais responsáveis pela divulgação do cálculo de Leibniz por toda a Europa. Em uma carta publicada em 1713, Johann questiona o caráter de Newton. Embora Bernoulli depois retirasse suas acusações, Newton ficou aborrecido a ponto de responder a ele pessoalmente: "Eu nunca busquei a fama entre nações estrangeiras, mas desejo muito preservar o meu caráter e a minha honestidade que o autor desta epístola tenta me negar, como se tivesse a autoridade de um grande juiz. Agora que estou velho pouco me agradam os estudos matemáticos e nunca tentei divulgar minha opiniões pelo mundo procurando não me envolver em disputas provocadas por elas."[8]

Newton não era tão modesto quanto sugerem suas palavras. É verdade que ele evitava controvérsias, mas perseguia implacavelmente seus inimigos. Em 1712, em resposta a um pedido de Leibniz para que seu nome ficasse limpo das acusações de plágio, a Reai Sociedade ocupou-se do assunto. Seu distinto corpo de estudiosos, cujo presidente, na época, era ninguém menos que Newton, nomeou um comitê para investigar a disputa e resolvê-la de uma vez por todas. O comitê era composto inteiramente por partidários de Newton, incluindo o astrônomo Edmond Halley, um dos seus amigos mais próximos (e cujas sugestões incansáveis o tinham levado a publicar seus *Principia*). O relatório final, publicado naquele mesmo ano, evitava a questão do plágio, mas concluía que o método de fluxões de Newton precedia, em quinze anos, o cálculo diferencial de Leibniz. Assim, com a aparência da objetividade acadêmica, a questão estava, supostamente, resolvida.

Mas não estava. A disputa continuou a envenenar a atmosfera dos círculos acadêmicos muito depois da morte dos dois protagonistas. Em 1721, seis anos após a morte de Leibniz, Newton, então com 80 anos, supervisionou a segunda edição do relatório da Sociedade Real, no qual fez várias mudanças destinadas a minar a credibilidade de Leibniz. Mas mesmo isso não satisfez o seu desejo de vingança. Em 1726, um ano antes de sua própria morte, Newton cuidou da publicação da terceira e última edição dos *Principia,* da qual eliminou todas as menções a Leibniz.

Os dois grandes rivais foram tão diferentes na morte quanto na vida. Leibniz, amargurado pela longa disputa de prioridade, passou seus últimos anos em completa desolação. Sua criatividade matemática se encerrara, embora ainda escrevesse sobre questões filosóficas. Seu último empregador, George Ludwig, eleitor de Hanover, o encarregou de escrever a história da família real. Em 1714, Ludwig tornou-se o rei Jorge 1 da Inglaterra e Leibniz esperou ser convidado para trabalhar com ele, mas o rei perdera o interesse em seus serviços. Ou talvez quisesse evitar o embaraço que a presença de Leibniz teria criado na Inglaterra, onde a popularidade de Newton estava no auge. Leibniz morreu em 1716, aos setenta anos, quase completamente esquecido. Apenas seu secretário foi ao enterro.

Newton, como vimos, passou seus últimos anos mantendo a disputa com Leibniz. Mas, longe de ser esquecido, ele se tornara um herói nacional, A disputa de prioridade só aumentou sua reputação, que acabou sendo uma questão de defender a honra da Inglaterra contra os "ataques" do continente. Newton morreu em 20 de março de 1727, com 85 anos de idade. Recebeu um funeral com honras de estado e foi enterrado na abadia de Westminster, em Londres, com honras reservadas normalmente aos estadistas e generais.

ooo

A princípio o conhecimento do cálculo ficou confinado a um grupo muito pequeno de matemáticos: o círculo de Newton na Inglaterra, e Leibniz e os irmãos Bernoulli no continente. Os Bernoullis o propagaram por toda a Europa, ensinando-o, particularmente, a vários matemáticos. Entre eles estava o francês Guillaume François Antoine LHospita! (1661-1704), que escreveu o primeiro livro-texto sobre o assunto, *Analyse des infinimentpetits* (1696).[9] Outros matemáticos do continente o seguiram e logo o cálculo era o tópico dominante na matemática do século XVIII. Ele foi rapidamente expandido para cobrir todo um conjunto de temas relacionados, notadamente equações diferenciais e o cálculo de variações. Esses assuntos ficaram sob a ampla categoria da *análise,* ramo da matemática que lida com a variação, a continuidade e os processos infinitos.

Na Inglaterra, onde se originara, o cálculo não se saiu tão bem. A figura grandiosa de Newton desencorajava os matemáticos britânicos a estudar o assunto com vigor. E o que era pior, ao se colocarem inteiramente do lado de Newton na disputa de prioridade, eles se desligaram dos desenvolvimentos feitos no continente. Teimosamente, mantinham a notação de pontos de Newton, negando-se a ver as vantagens da notação diferencial de Leibniz. Em conseqüência, nos cem anos seguintes, enquanto a matemática florescia na Europa como nunca antes, a Inglaterra não produziu um único matemático de primeira linha. E quando o período de estagnação terminou, em 1830, não foi na análise e sim na álgebra que a nova geração de matemáticos ingleses deixou sua marca.

NOTAS E FONTES

1. Este argumento supõe que a função *é contínua* em P — ou seja, que o gráfico não sofre, ali, uma quebra. Em pontos de descontinuidade uma função não tem derivada.
2. O nome "derivada" foi criado por Joseph Louis Lagrange, que também introduziu o símbolo $f(x)$ para a derivada de $f(x)$; ver a página 127.
3. Isto se origina do fato de que um incremento de Δx em x faz u aumentar de Δu C v em Δv; daí, y aumenta em $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) — uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$. E como (parafraseando Leibniz) Δu e Δz são pequenos, seu produto $\Delta u\Delta v$ *é* ainda menor em comparação com os outros termos e portanto pode ser ignorado. Assim obtemos $\Delta y \approx u\Delta v + v\Delta u$ onde $\approx$ significa "aproximadamente igual a". Dividindo ambos os lados desta relação por Δx e deixando Δx tender a 0 (e consequentemente passando dos Δ´s para os d's) obteremos o resultado desejado.
4. Falando de um modo preciso, devemos fazer uma distinção entre x como a variável independente da função $y = f(x)$ e o xcomo a variável da função de área $A(x)$. Na página 108 nós fizemos uma distinção ao chamar o último de t. O Teorema Fundamental diz então que $dA/dt = f(t)$. É prática comum, entretanto, usar a mesma letra para ambas as variáveis, desde que não haja perigo de confusão. Seguimos essa prática aqui.
5. O símbolo $_a\int^b (x)dx$ *é* chamado de *integral definida* de $f(x)$ *de* $x = a$ a $x = b$, o adjetivo "definida" indica que aqui não está envolvida nenhuma constante arbitrária. De fato, se $F(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, teremos $_a\int^b f(x)dx = [F(x)+c]_{x=b} - [F(x)+c]_{x=a} = [F(b)+c] - [F(a)+c] = F(b) - F(a)$, de modo que a constante c é cancelada.
6. Note que o resultado obtido aqui nos dá a área *sob* a parábola $y = x^2$; entre os eixos dos x e as ordenadas $x = 0$ e $x = 1$,

enquanto o resultado de Arquimedes (págs. 63-65) nos dá a área de um setor inscrito *dentro* da parábola. Uma breve avaliação mostrará que os dois resultados são compatíveis.

7. Citado em *An Introduction to Astronomy,* de Forest Ray Moulton (Nova York: Macmillan, 1928), p. 234.
8. Citado em *A Sbort Account of the History of Mathematics* de W. W, Rouse Bali (1908; reimpressão, Nova York, Dover, 1960), pp. 359-60.
9. Ver The Mathematics of Great Amateurs, de Julian Loweli Coolidge (1949; reimpressão Nova York; Dover, 1963), pp. 154-163, e A Source Book in Mathematics, 1200-1800 de D. J. Struik (Cambridge, Mass.: Harvard Universicy Press, 1969), pp. 312-316.

A evolução de uma notação

O conhecimento operacional de um tópico matemático exige um bom sistema de notação. Quando Newton inventou seu "método das fluxões", colocou um ponto sobre a letra representando uma quantidade cuja fluxão (derivada) ele buscava. Esta notação dos pontos — Newton a chamou de notação da "letra pontuada" — é ineficiente. Para encontrar a derivada *de* $y = x^2$, devemos primeiro obter uma relação entre as fluxões de xe dey em relação ao tempo (Newton pensava em cada variável como "fluindo" uniformemente com o tempo, daí o termo *fluxão),* neste caso $\dot{y} = 2x\dot{x}$ (ver a pág. 103). A derivada, ou taxa de mudança dey com relação a *x*, *é* a proporção entre as duas fluxões, ou seja, $\dot{y}/\dot{x} = 2x$.

A notação do ponto sobreviveu na Inglaterra por mais de um século e ainda pode ser encontrada em livros de física para denotar a diferenciação em relação ao tempo. A Europa continental, entretanto, adotou a notação diferencial mais eficiente de Leibniz, *dy/dx.* Leibniz pensava em *dx* e *dy* como pequenos incrementos nas variáveis x ey; sua proporção ofereceu-lhe uma medida da taxa de variação dey em relação a *x*. Atualmente usamos a letra Δ (delta maiúsculo grego) para denotar as diferenciais de Leibniz. Seu *dy/dx é* escrito como Δy/Δx, enquanto *dy/dx* simboliza o *limite* de Δy/Δx quando Δx e Δy se aproximam de 0.

A notação *dy/dx* para a derivada apresenta muitas vantagens. É altamente sugestiva e de muitos modos se comporta como uma fração ordinária. Por exemplo, se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, então *y* é uma função indireta de *t*, $y = h(t)$. Para calcular a derivada desta *função composta* nós usamos a "regra da cadeia": $dy/dt = (dy/dx) . (dx/dt)$. Note que,' embora cada derivada seja um *limite* de uma proporção, ela se comporta como se fosse uma proporção real entre duas quantidades finitas. De modo semelhante, se $y - f(x)$ for uma função um-para-um (veja pág. 227), ela terá um inverso $x = f^{-1}(y)$. A derivada desta função inversa é a recíproca da derivada original: $dx/dy = 1/(dy/dx)$, uma fórmula que novamente imita o modo como as frações ordinárias se comportam.

Entretanto, outra notação para a derivada tem a vantagem de ser concisa; Se $y = f(x)$, nós chamamos sua derivada de f '(x) ou simplesmente y'. Assim, *se* $y = x^2$, então $y' = 2x$. Esta notação foi publicada em 1797 por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) em seu tratado *Théorie des fonctions analytiques,* no qual ele também propôs a notação fx para a função de x – precursor do nosso familiar $f(x)$. Ele chamou $f'x$ *de função derivada de* fx, de onde vem o moderno termo *derivada.* Para a segunda derivada de y (ver pág. 138) ele escreveu y'' ou $f''x$ assim por diante.

Se u for uma função com duas variáveis independentes, $u = f(x, y)$ nós devemos especificar com relação a qual variável, x ou y, estamos diferenciando. Para este propósito usamos a letra germânica δ no lugar do d romano e obtemos as duas *derivadas parciais* de u: $\delta u/\delta x$ e $\delta u/\delta y$. Nesta notação todas as variáveis, exceto aquelas indicadas, são mantidas constantes. Por exemplo, *se* $u = 3x^2y^3$, então $\delta u/\delta x = 3(2x)y = 6xy^3$ e $\delta u/\delta x = 3x^2(3y^2) = 9x^2y^2$, onde, no primeiro caso y *é* mantido constante e, no segundo caso, x.

As vezes desejamos nos referir a uma operação sem realmente realizá-la. Símbolos tais como+, –, e √ são chamados de símbolos operacionais, ou, simplesmente *operadores.* Um operador somente adquire significado quando aplicado a uma quantidade sobre a qual ele pode operar; por exemplo $\sqrt{16} = 4$. Para indicar a diferenciação usamos o símbolo operador d/dx, com a acepção de que tudo que aparecer *à direita* do operador deve ser diferenciado, enquanto tudo que estiver à esquerda não deve. Por exemplo, $x^2\, d/dx(x^2) = x^2 . 2x = 2x^3$. Uma segunda diferenciação é denotada por $d/dx\,(d/dx)$, e abreviada como $d^2/(dx^2)$.

E novamente uma notação mais curta foi concebida: o operador diferencial D. Este operador age sobre qualquer função que estiver imediatamente à sua direita, enquanto quantidades à esquerda não serão afetadas. Por exemplo, $x^2Dx^2 = x^2 . 2x = 2x^3$. Para uma segunda diferenciação escrevemos D^2; assim, $D^2x^5 = D(Dx^5) = D(5x4) = 5. 4x3 = 20x3$. De modo semelhante, D'' (onde n é qualquer inteiro positivo) indica n diferenciações sucessivas. Além disso, permitindo que n seja um inteiro *negativo* nós podemos estender o símbolo D para indicar uma anti-diferenciação (isto é, uma integração indefinida; veja a pág. 108). Por exemplo $D^{-1}x^2 = x^3/^3 + c$, como podemos verificar facilmente diferenciando o lado direito (aqui c *é* uma constante arbitrária).

E como a função $y = e^x$ é igual à sua própria derivada, nós temos a fórmula $Dy = y$. Esta fórmula, sem dúvida, é meramente uma equação diferencial cuja solução é $y = e^x$, ou, de um modo mais geral $y = Ce^x$. Contudo, é tentador considerar a equação $Dy = y$ como uma equação algébrica ordinária e "cancelar" o y em ambos os lados, como se o símbolo D fosse uma quantidade multiplicada por y. Sucumbindo a esta tentação, teremos $D = 1$, uma equação operacional que, em si, não tem significado, mas que obtém um significado se "remultiplicarmos" ambos os lados por y.

Ainda assim, este tipo de manipulação formal torna o operador D útil para resolver certos tipos de equações diferenciais. Por exemplo, a equação diferencial $y'' + 5y - 6y = 0$ (uma equação linear com coeficientes constantes), pode ser escrita como $D^2y + 5Dy - 6y = 0$. Fingindo que todos os símbolos nesta equação são quantidades algébricas ordinárias, podemos "colocar em evidência" a função desconhecida y no lado esquerdo e obter $(D^2 + 5D - 6)y = 0$. Agora, o produto de dois fatores só pode ser igual a 0 se um ou outro fator for 0. De modo que temos ou $y = 0$ (que é uma solução trivial, sem interesse), ou $D^2 + 5D - 6 = 0$. Novamente agindo como se D fosse uma quantidade algébrica, podemos fatorar esta última expressão e ter $(D - 1)(D + 6) = 0$. Igualando cada fator a 0 teremos as "soluções" $D = 1$ e $D = -6$. É claro que essas soluções são meramente declarações operacionais; precisamos "multiplicá-las" por y obtendo $Dy = y$ e $Dy = -6y$. *A* primeira equação tem uma solução $y = e^x$ ou mais geralmente $y = Ae^x$ onde A será uma constante arbitrária. A segunda equação tem como solução $y = Be^{-6x}$, onde B é outra constante arbitrária. Como a equação original é linear e seu lado direito é igual a zero, a soma das duas soluções, ou seja $y = Ae^x + Be^{-6x}$ constitui também uma solução. De fato é a solução *geral* da equação $y'' + 5y - 6y = 0$.

O símbolo D como operador foi usado pela primeira vez em 1800 pelo francês Louis François Antoine Arbogast (1759-1803), embora Johann Bernoulli o tivesse usado anteriormente de um modo não operacional. Foi o engenheiro eletricista inglês Oliver Heaviside (18501925) que elevou o uso dos métodos operacionais à condição de uma verdadeira arte. Habilmente manipulando o símbolo D e tratando-o como uma quantidade algébrica, Heaviside resolveu numerosos problemas aplicados, principalmente às equações diferenciais que surgem da teoria elétrica, de um modo elegante e eficaz. Heaviside não tinha uma educação formal em matemática e sua descuidada virtuosidade na manipulação de *D* foi censurada pelos matemáticos profissionais. Heaviside defendeu seus métodos afirmando que o fim justifica os meios: os métodos produziam resultados corretos, de modo que uma justificação rigorosa tinha importância secundária para ele. Suas idéias encontraram a justificação formal adequada num método mais avançado conhecido como transformada de Laplace.[1]

NOTA

1. Vide *Applied Differential Equations,* de Murray R. Spiegel, 3ª ed. (Englewood Cliffs, NJ, Prentíce-Hall, 1981), pp. 168-169 e 204-211. Para uma descrição completa da evolução da notação diferencial, ver *A History of Mathematical Notations* de Florian Cajori, vol. 2, *Higher Mathematics* (1929; reimpressão La Salle, 111., Open Court, 1951), pp-196-242.

10

e^x: A função que é igual à sua derivada

A função exponencial natural é idêntica à sua derivada. Esta é a fonte de todas as propriedades das funções exponenciais e o motivo básico para sua importância em aplicações.

– RICHARD COURANT E HERBERT ROBBINS, *What Is Mathematics?* (1941)

Quando Newton e Leibniz desenvolveram seu novo cálculo, eles o aplicaram primariamente a *curvas algébricas,* curvas cujas equações são polinômios ou proporções entre polinômios. (Um *polinômio é* uma expressão na forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; as constante a_i são os *coeficientes* e *n,* o grau do polinômio, é sempre um inteiro não negativo. Por exemplo, $5x^3+x^2-2x+1$ é um polinômio de grau 3.) A simplicidade dessas equações e o fato de que muitas delas aparecem em aplicações (a parábola $y=x^2$ é um exemplo simples) fazem delas a escolha natural para testar os novos métodos do cálculo. Mas nas aplicações também encontramos muitas curvas que não se encaixam na categoria das curvas algébricas. Essas são as curvas *transcendentais.* (O termo foi criado por Leibniz para sugerir que suas equações iam além daquelas estudadas pela álgebra elementar.) A principal entre elas era a curva exponencial.

Vimos no Capítulo 2 como Henry Briggs aperfeiçoou as tabelas de logaritmos de Napier introduzindo a base 10 e trabalhando com potências desta base. Em princípio, qualquer número positivo diferente de 1 pode ser uma base. Se chamarmos a base de *b* e seu expoente de *x,* teremos a*função exponencial de base b,* $y=b^x$ Aqui *x* representa qualquer número real, positivo ou negativo. Devemos, contudo, esclarecer o que simbolizamos por *if* quando x não for um inteiro, Quando x *é* um número racional m/n, nós definimos b^x ou como $^n\sqrt{b^m}$ ou $(^n\sqrt{b})^m$ — as duas expressões são iguais desde que m/n seja reduzida aos seus menores termos. Por exemplo, $8^{2/3} = {}^3\sqrt{8^2} = {}^3\sqrt{64} = 4$, ou $8^{2/3} = ({}^3\sqrt{8})^2 = 2^2 = 4$. Mas quando x for *irracional* — quando ele não puder ser escrito como uma proporção entre dois inteiros —, esta definição será inútil. Neste caso aproximaremos o valor de x através de uma *seqüência de números racionais,* a qual, no limite, convergirá para x. Tomemos como exemplo $3^{\sqrt{2}}$. Podemos pensar no expoente $x = \sqrt{2} = 1{,}414213\ \ldots$ (um número irracional) como o limite de uma seqüência infinita de decimais finitos $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, $x_4 = 1{,}414\ \ldots$ cada um dos quais é um número racional. Cada um desses x_i's determina um valor único de 3^{x_i} de modo que definimos $3^{\sqrt{2}}$ como o limite da seqüência 3^{x_i} como $i \to \infty$. Com uma calculadora de mão podemos facilmente encontrar os primeiros valores desta seqüência: $3^1 = 3$, $3^{1,4} = 4{,}656$, $3^{1,41} = 4{,}707$, $3^{1,414} = 4{,}728$, e assim por diante (todos aproximados para três decimais). No limite teremos 4,729, o valor desejado.

Existe, é claro, uma pressuposição sutil, mas crucial, por trás desta idéia: à medida que os x convergirem para o limite $\sqrt{2}$, os valores correspondentes de 3^{x_i} vão convergir para o limite $3^{\sqrt{2}}$. Em outras palavras, presumimos que a função $y = 3^x$ — e de um modo mais geral, $y = b^x$ — seja uma função *contínua* de x, variando uniformemente, sem quebras ou saltos. Esta suposição de continuidade está no coração do cálculo diferencial. Ela já está implícita na definição de derivada, pois quando computámos o limite da proporção $\Delta y/\Delta x$ quando $\Delta x \to 0$, nós presumimos que Δx e Δy tendem a zero simultaneamente.

Para ver as características gerais da função exponencial, vamos escolher a base 2. Restringindo-nos aos valores inteiros de x obteremos a seguinte tabela:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
2^x	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32

Se marcarmos esses valores em um sistema de coordenadas, obteremos o gráfico mostrado na figura 31. Podemos ver que, conforme x aumenta, y

também aumenta, lentamente a princípio, mas cada vez mais rapidamente em direção ao infinito.

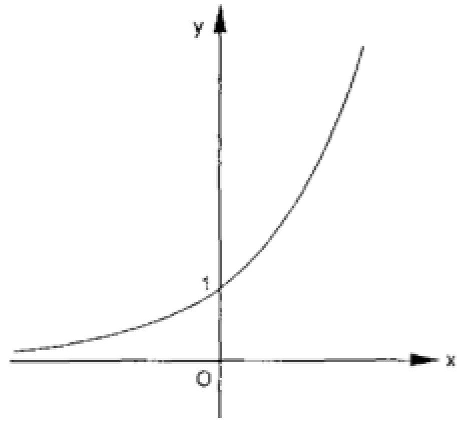


Figura 31. O gráfico de uma função exponencial crescente.

E de modo inverso, quando *x* diminui*, y* diminui numa taxa sempre mais lenta. Ele nunca chegará a 0 mas se aproximará cada vez mais dele. O eixo dos x negativos é assim uma assintota horizontal da função, o equivalente gráfico do conceito de limite discutido no Capítulo 4.

A taxa de crescimento de uma função exponencial pode ser bem espantosa. Uma famosa lenda sobre o inventor do jogo de xadrez, diz que, quando chamado à presença do rei e indagado que recompensa desejava por sua invenção, ele humildemente pediu que um grão de trigo fosse colocado no primeiro quadrado do tabuleiro, dois grãos no segundo quadrado, quatro grãos no terceiro e assim por diante, até que todos os sessenta e quatro quadrados do tabuleiro estivessem cobertos. O rei, surpreso com a modéstia do pedido, imediatamente ordenou que fosse trazido um saco de grãos e seus servos pacientemente começaram a colocar os grãos no tabuleiro. Para seu espanto, logo ficou claro que nem mesmo todos os grãos de trigo do reino seriam suficientes para atender ao pedido, já que o námero de grãos no último quadrado, 2^{63}, é 9.223.372.036.854.775.808 (aos quais devemos somar os grãos de todos os quadrados anteriores, o que torna o número total o dobro desta quantidade). Se colocássemos tantos grãos em uma fileira contínua, a linha teria o comprimento de dois anos-luz — cerca de metade da distância até a estrela Alfa do Centauro, nossa vizinha mais próxima além do sistema solar.

O gráfico mostrado na figura 31 é típico de todos os gráficos exponenciais, independentemente de suas bases.[1] A simplicidade deste gráfico *é* extraordinária, já que ele não apresenta as características mais comuns dos gráficos de funções algébricas tais como *interceptações de x* (pontos onde o gráfico cruza o eixo dos *x*), pontos de máximo e de mínimo, e pontos de inflexão. Além disso, o gráfico não tem assíntotas *verticais* — valores de *x* perto dos quais a função aumenta ou diminui sem limites. De fato, tão simples é o gráfico exponencial que quase poderíamos desconsiderá-lo, como pouco interessante, se não fosse um detalhe que o torna dnico: sua taxa de variação.

Como vimos no Capítulo 9, a taxa de variação, ou derivada, de uma função $y = f(x)$ é definida como $dy/dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$. Nosso objetivo é encontrar esta taxa para a função $y = b^x$. Se aumentarmos o valor de x em Δx,y aumentará na quantidade $\Delta y = b^{x-\Delta x} - b^x$. Usando as regras da exponenciação podemos escrever isto como $b^x b^{\Delta x} - b^x$ ou $b^x(b^{\Delta x}-1)$. A taxa de variação pedida é, assim, igual a:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{b^x(b^{\Delta x}-1)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Neste ponto seria mais prático substituir o símbolo Δx por uma única letra *h*, de modo que a equação 1 se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{b^x(b^h-1)}{h}. \qquad (2)$$

Podemos fazer uma segunda simplificação removendo o fator b^x do sinal de limite. Isto acontece porque o limite na equação 2 envolve apenas a variável *h*, enquanto *x* é considerado fixo. Assim, chegamos à expressão

$$\frac{dy}{dx} = b^x \lim_{h \to 0} \frac{b^h-1}{h}. \qquad (3)$$

É claro que neste ponto não temos nenhuma garantia de que o limite que aparece na equação 3 exista realmente. Sua existência está provada em textos avançados,[2] e vamos aceitá-la aqui. Denotando esse limite pela letra *k* chegamos ao seguinte resultado:

$$\text{Se } y = b^x \text{, então } \frac{dy}{dx} = kb^x = ky. \tag{4}$$

Este resultado é de importância tão fundamental que podemos expressá-lo nas palavras: *A derivada de uma função exponencial é proporcional à própriafunção.*

Note que usamos a frase “a derivada de *uma* função exponencial”, não da função exponencial, porque até agora a escolha de *b* era inteiramente arbitrária. Mas aqui surge a questão: existe algum valor particular de *b* que seria especialmente adequado? Voltando à equação 4, se pudermos escolher *b* de modo a tornar a constante de proporcionalidade *k* igual a 1, isto claramente tornaria a equação 4 particularmente simples. De fato, seria a escolha “natural” de *b*. Nossa tarefa então é determinar o valor de *b* para o qual *k* será igual a 1, ou seja,

$$\lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1. \tag{5}$$

Vamos ter que usar um pouco de manipulação algébrica (e algum sutil pedantismo matemático) a fim de resolver esta equação para *b,* e vamos omitir esses detalhes aqui (uma derivação heurística é dada no Apêndice 4). O resultado é:

$$b = \lim_{h \to 0} (1 + h)^{1/h}. \tag{6}$$

Agora, se nesta equação substituirmos $1/h$ pela letra *m,* então, à medida que h → 0*, m* vai tender ao infinito. Portanto, teremos:

$$b = \lim_{m \to \infty} (1 + 1/m)^m. \tag{7}$$

Mas o limite aparecendo na equação 7 não é nada mais do que o número e =2,71828….[3] Assim chegamos à seguinte conclusão: *Se o número efor escolhido como base, a função exponencial será igual à sua própria derivada.* Em símbolos,

$$\text{Se } y = e^x \text{, então } \frac{dy}{dx} = e^x. \qquad (8)$$

Mas há mais neste resultado. Não apenas a função e^x *é* igual à sua própria derivada, como é a *única* função (descontando-se uma constante multiplicativa) que tem esta propriedade. Apresentando a questão de um modo diferente, se resolvermos a equação $dy/dx = y$ (uma equação diferencial) para a função *y,* obteremos a solução $y = Ce^x$, onde *C é* uma constante arbitrária. Esta solução representa uma família de curvas exponenciais (fig. 32), cada uma correspondente a um valor diferente de *C.*

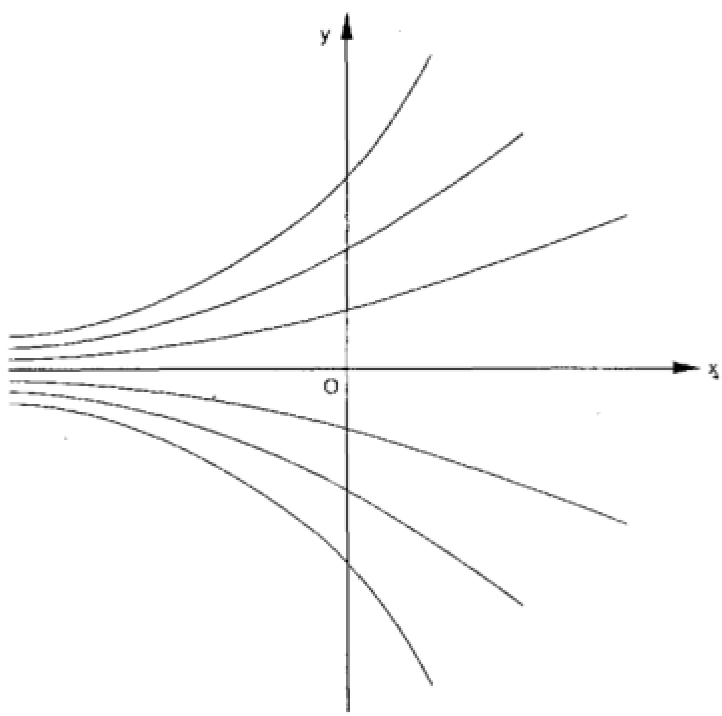


Figura 32. A família de curvas exponenciais$y = Ce^x$. Cada gráfico corresponde a um valor de *C.*

O papel central da função e^x — daqui em diante chamada de função exponencial natural ou simplesmente *a* função exponencial — na matemática e na ciência é uma conseqüência direta destes fatos. Nas aplicações encontramos numerosos fenômenos nos quais a taxa de mudança de alguma quantidade é proporcional à própria quantidade. Qualquer fenômeno deste tipo será governado pela equação diferencial $dy/dx = ay$, onde uma constante a determinará a taxa de variação em cada caso. A solução é $y = Ce^{ax}$, onde a constante arbitrária C é determinada a partir da *condição inicial* do sistema: o valor de y quando $x = 0$. Dependendo se a é positivo ou negativo, y irá aumentar ou diminuir com x, resultando em *crescimento* ou *decaimento exponencial.* (Quando a é negativo, geralmente o substituímos por $-a$, onde o próprio a é agora positivo.) Vamos citar alguns exemplos de tais fenômenos.

1. A taxa de decaimento de uma substância radioativa — e a quantidade de radiação que ela emite — é, em cada momento, proporcional a sua massa m: $dm/dt = -am$. A solução desta equação diferencial é $m = m_0 e^{-at}$, onde m_0 é a massa inicial da substância (a massa em $t = 0$). A partir desta solução vemos que m gradualmente se aproximará de 0 mas nunca o alcançará — a substância nunca se desintegrará completamente. Isto explica por que, anos depois de um material nuclear ter sido descartado como lixo, ele ainda pode ser perigoso. O valor de a determina a taxa de decaimento da substância e é, geralmente, medido pelo tempo da *meia-vida,* o tempo que a substância radioativa leva para decair até a metade de sua massa inicial. Substâncias diferentes possuem tempos de meia-vida muito diferentes. Por exemplo, o isótopo comum do urânio (U^{238}) tem uma meia-vida de cerca de 5 bilhões de anos, o rádio comum (Ra^{226}) leva mil e seiscentos anos, enquanto o Ra^{220} tem uma meia-vida de apenas vinte e tres milissegundos. Isto explica por que alguns dos elementos instáveis da tabela periódica não são encontrados nos minérios naturais: qualquer que tenha sido a quantidade deles presente quando a Terra se formou, eles já se transmutaram em elementos mais estáveis.

2. Quando um objeto quente, com uma temperatura T_0, *é* colocado em um ambiente de temperatura T_1 (que se presume permanecer constante), o objeto esfria a uma taxa proporcional à diferença $T - T$ entre sua temperatura no tempo t e a temperatura circundante: $dT/dt = -a(T - T_1)$. Isto é conhecido como a lei do resfriamento de Newton. A solução é $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-at}$, mostrando que T gradualmente se aproximará de 7) mas nunca a alcançará.
3. Quando as ondas sonoras viajam através do ar (ou de qualquer outro meio), sua intensidade é governada pela equação diferencial $dI/dx = -aI$, onde x é a distância percorrida. A solução, $I = I_0e^{-ax}$, mostra que sua intensidade diminui exponencialmente com a distância. Uma lei semelhante, conhecida como lei de Lambert, é verdadeira para a absorção da luz num meio transparente.
4. Se o dinheiro for aplicado *continuamente* (isto é, a cada instante) a uma taxa anual de juros r, o saldo, depois de t anos, será dado pela fórmula $A = Pe^{rt}$, onde P será o principal. Assim o saldo crescerá exponencialmente com o tempo.
5. O crescimento de uma população segue uma lei aproximadamente exponencial.

A equação $dy/dx = ax$ é uma equação diferencial de *primeira ordem*: ela envolve apenas uma função desconhecida e sua derivada. Mas a maioria das leis da física *é* expressa em termos de equações diferenciais de *segunda ordem* — equações envolvendo a *taxa de variação da taxa de variação* de uma função, ou sua *segunda derivada.* Por exemplo, a aceleração de um objeto em movimento é a taxa com que muda a sua velocidade, e como a própria velocidade é a taxa de variação da distância, segue-se que a aceleração é a taxa de variação da taxa de variação, ou a segunda derivada da distância. Como as leis da mecânica clássica são baseadas nas três leis do movimento de Newton — a segunda delas relaciona a aceleração de um corpo de massa m a uma força agindo sobre ele ($F = ma$) —, essas leis são expressas em termos de equações diferenciais de segunda ordem. Uma situação semelhante acontece na eletricidade.

Para encontrar a segunda derivada de uma função $f(x)$, primeiro diferenciamos $f(x)$ para obter sua primeira derivada. Esta derivada é, em si, uma função de x denotada por $f'(x)$. Então diferenciamos $f(x)$ para obter a segunda derivada, $f''(x)$. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f'(x) – 3x^2$ e $f''(x)=6x$. É claro que não existe nada que nos detenha aqui, podemos prosseguir e encontrar a terceira derivada $f'''(x)=6x$, e a quarta derivada (0), e assim por diante. Com uma função polinomial de grau *n, n* diferenciações sucessivas nos darão uma constante e todas as diferenciações subseqüentes serão iguais a 0. Para outros tipos de funções, diferenciações repetidas podem resultar em expressões cada vez mais complexas. Nas aplicações, contudo, raramente precisamos ir além da segunda derivada.

A notação de Leibniz para a segunda derivada é $d/dx(dy/dx)$, ou (contando os *d's.* como se eles fossem quantidades algébricas) e $d^2y(dx)^2$. Como o símbolo dy/dx para a primeira derivada, este símbolo também se comporta de um modo que nos lembra as regras familiares da álgebra. Por exemplo, se computarmos a segunda derivada do produto y $=u.\ v$ de duas funções $u(x)$ e $v(x)$, obteremos, depois de aplicar duas vezes a regra do produto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Este resultado, conhecido como regra de Leibniz, tem uma extraordinária semelhança com a expansão binomial $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. De fato podemos estendê-lo até a derivada de *enésima ordem* de $u.\ v$, e os coeficientes são exatamente coeficientes binominaís da expansão de $(a+b)^n$ (ver a pág. 52).

Um problema freqüente na mecânica é o de descrever o movimento de um sistema vibratório, uma massa presa a uma mola, por exemplo — levando em conta a resistência do meio circundante. Este problema leva a uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. Um exemplo desse tipo de equação é:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Para resolver esta equação vamos fazer uma suposição perspicaz: a solução está na forma $y = Ae^{mt}$, onde A e m são constantes ainda indeterminadas. Substituindo esta possível solução na equação diferencial, ficamos com

$$e^{mt}(m^2 + 5\ m + 6) = 0\ ,$$

que é uma equação algébrica com o m desconhecido. E como e^{mt} nunca é 0, podemos cancelar e obter a equação $m^2+5m+6 = 0$, conhecida como a *equação característica* de uma dada equação diferencial (note que as duas equações possuem os mesmos coeficientes). Fatorando-a, obteremos $(m+2)(m+3) = 0$ e depois de igualar cada fator a 0 encontraremos os valores pedidos de m, ou seja -2 e -3. Assim teremos duas soluções distintas, Ae^{-2t} e Be^{-3t} e podemos facilmente comprovar que a sua soma, $y = Ae^{-2t}+Be^{-3t}$ também é uma solução — de fato, é a solução *completa* da equação diferencial. As constantes A e B (que até agora eram arbitrárias) podem ser obtidas a partir das condições iniciais do sistema: os valores de y e de dy/dt quando $t = 0$.

Este método funciona com qualquer equação diferencial do tipo que acabamos de resolver; para achar a solução precisamos somente resolver a equação característica. Contudo, existe um problema, a equação característica pode ter soluções *imaginárias*, soluções que envolvem a raiz quadrada de -1. Por exemplo, a equação $d^2y/dx^2+y = 0$, tem como equação característica $m^2+1 = 0$, cujas duas soluções são os números imaginários $\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$. Se chamarmos esses números de i e $-i$, a solução da equação diferencial será $y = Ae^{ix}+Be^{-ix}$, onde, como no caso anterior, A e B são constantes arbitrárias.[4] Mas em todos os nossos encontros com a função exponencial, sempre presumimos que o expoente é um número real. O que então significa uma expressão como e^{ix}? Esta foi uma das grandes conquistas da matemática do século XVIII a fim de obter um significado para a função e^{mx}, mesmo quando m *é* um número imaginário, como veremos no Capítulo 13.

Um outro aspecto da função exponencial deve ser considerado. A maioria das funções $y = f(x)$, quando definidas em um domínio apropriado, possuem um inverso, isto é, não somente podemos determinar um valor único de y para cada valor de x dentro daquele domínio, mas também podemos encontrar um x único para cada y permissível. A regra que nos leva de volta de y para x define a *função inversa de* $f(x)$, que denotamos como $f^{-1}(x)$.[5] Por exemplo, a função $y = f(x) = x^2$ dá a cada número real x um $y \geq 0$, ou seja, o quadrado de x. Se restringirmos o domínio de $f(x)$ aos números não negativos, podemos inverter o processo e dar a cada $y \geq 0$ um x único, a *raiz quadrada* dc y:$x = \sqrt{y}$.[6] É costume trocar as letras nesta última equação, de modo que x denote a variável Independente e y a dependente. Chamando a função inversa de f^{-1}, teremos $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Os gráficos de $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ são reflexos um do outro na linha do $y = x$, como mostra a figura 33.

Nosso objetivo é encontrar o inverso da função exponencial. Começando com a equação $y = e^x$ e pensando em y como sendo um valor determinado; queremos então resolver esta equação para x, isto é, expressar x em termos de y. Lembramos que o *logaritmo comum* ou briggsiano de um número $y > 0$ é o número x para o qual $10^x = y$. Exatamente do mesmo modo, o *logaritmo natural* de um número $y > 0$ é o número x para o qual $e^x = y$. E assim como escrevemos $x = \log y$ para o logaritmo comum (logaritmo de base 10) de y, também escrevemos $x = \ln y$ para seu logaritmo natural (logaritmo de base e). O inverso da função exponencial é então a função logarítmica natural e sua equação, depois de trocar

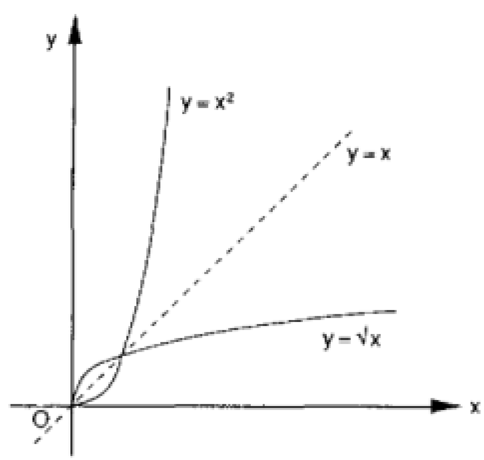


Figura 33. As equações $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ representam funções inversas; seus gráficos são imagens de espelho um do outro, ao longo da linha $y = x$.

x e y, é $y = \ln x$. A figura 34 mostra os gráficos de $y = e^x$ e de $y = \ln x$ plotados no mesmo sistema de coordenadas; como acontece com qualquer par de funções inversas, os dois gráficos sáo reflexos um do outro sobre a linha $y = x$.

Tendo definido o logaritmo natural como o inverso da função exponencial, agora queremos encontrar sua taxa de variação. Novamente, neste caso, a notação diferencial de Leibniz é uma grande ajuda. Ela diz que a taxa de variação

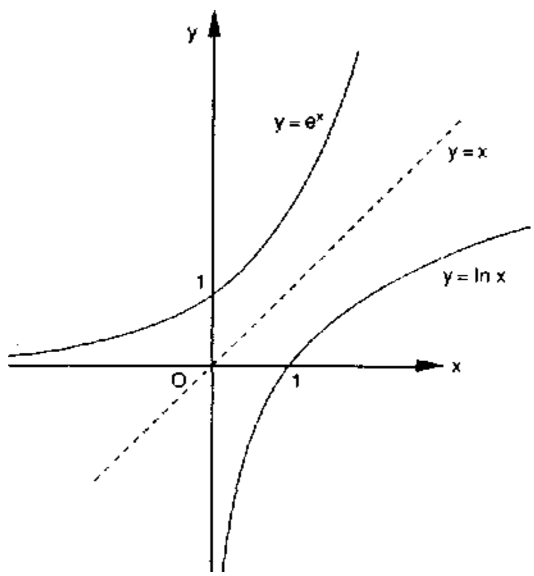


Figura 34. As equações $y = e^x$ e $y = \ln x$ representam funções inversas.

de uma função inversa é a *recíproca* (um dividido por) da taxa de mudança da função original; em símbolos $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Por exemplo, no caso em que $y = x^2$ teremos $dy/dx = 2x$, e assim, $dx/dy = 1/2x = 1/(2\sqrt{y})$. Quando intercambiamos x e y, nosso resultado vai ser: Se $y = \sqrt{x}$ então, $dy/dx = 1/(2\sqrt{x})$; ou, de modo ainda mais resumido, $d(\sqrt{x})/dx = 1/(2\sqrt{x})$.

No exemplo que acabamos de dar, poderíamos ter encontrado o mesmo resultado escrevendo $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ e então diferenciando diretamente, usar a regra da potência: $dy/dx = (1/2)x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$. Mas isso é apenas porque o inverso de uma função de potência é uma função de potência, para a qual conhecemos a regra da diferenciação. No caso de uma função exponencial devemos começar do nada. Temos $y = e^x$ e $dy/dx = e^x = y$, de modo que $dx/dy = 1/e^x = 1/y$. Isso nos diz que a taxa de variação de x — considerado como uma função de y — é igual a $1/y$. Mas o que *é* x como função de y? Ele é, precisamente l*n* y, porque $y = e^x$ é o equivalente a $x = \ln y$. Quando trocamos as letras, como fizemos antes, nossa fórmula vai ser: *Se* $y = \ln x$, então $dy/dx = 1/x$; ou, de modo ainda mais resumido, $d(\ln x)/dx = 1/x$. E isto, por sua vez, significa que $\ln x$ *é* uma *antiderivada* de $1/x$: $\ln x = \int (1/x) dx$.[7]

Vimos no Capítulo 8 que a antiderivada de x^n é $x^{n+1}/(n+1)+c$; ou, em símbolos, $\int x^n \, dx = x^{n+1}/(n+1)+c$, onde c *é* a constante da integração. Esta fórmula *é* válida para todos os valores de n, exceto – 1, porque então o denominador $n+1$ é igual a 0. Mas quando $n = -1$, a função cuja antiderivada estamos buscando é a hipérbole $y = x^{-1} = 1/x$— a mesma função cuja quadratura Fermat não conseguiu obter. A fórmula $\int (1/x) dx = \ln x + c$ nos fornece agora o "caso perdido". Ela explica imediatamente a descoberta de Saint-Vincent de que a área sob a hipérbole segue uma lei logarítmica (pág. 94). Denotando esta área por $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x + c$. Se escolhermos o ponto inicial a partir do qual a área será medida como $x = 1$, teremos $0 = A(1) = \ln 1 + c$. Mas $\ln 1 = 0$ (porque $e^{\circ} = 1$), e assim teremos $c = 0$. Podemos então concluir que: *A área sob a hipérbole* $y = 1/x$ *de* $x = 1$ *a qualquer* $x > 1$ *é igual a* $\ln x$.

E como o gráfico de $y = 1/x$ para $x > 0$ fica inteiramente acima do eixo dos x, a área sob ele cresce continuamente quanto mais nos movermos para a direita. Em linguagem matemática, a área é uma função *monótona crescente* de x. Isto significa que se começarmos de $x = 1$ e nos movermos para a direita, eventualmente chegaremos a um ponto x onde a área será exatamente igual a 1. Para esse x em particular nós teremos $\ln x = 1$, ou (lembrando a definição de $\ln x$), $x = e^1 = e$. Este resultado imediatamente dá ao número e um significado geométrico que o relaciona com a hipérbole do mesmo modo como π está relacionado com o círculo. Usando a letra A para simbolizar a área teremos:

Círculo: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi$ quando $r = 1$
Hipérbole: $A = \ln x \Rightarrow A = 1$ quando $x = e$

Note-se, contudo, que a semelhança nao é perfeita: onde n *é* interpretado como a área de um círculo unitário, *e é* a dimensão *linear* para a qual a área sob a hipérbole tem o valor 1. Aínda assim, os papéis análogos dos dois números mais famosos da matemática nos dão motivo para suspeitar de que existe uma conexão ainda mais profunda entre eles. E isso é verdade, como veremos no Capítulo 13.

NOTAS E FONTES

1. Se a base for um número entre 0 e 1, digamos 0,5, o gráfico será uma imagem espelhada da figura 31: ele diminuirá da esquerda para a direita e se aproximará do eixo positivo dos xà medida que $x \to \infty$. Isto acontece porque a expressão $y=0,5^x=(1/2)^x$ pode ser escrita como 2^{-x}. cujo gráfico é o inverso do gráfico de $y=2^x$ no eixo dos y.
2. Ver, por exemplo, *Differential and Integral Calculas,* de EdmundLandau (1934), tradução de Melvin Hausner e Martin Davis (1950; reimpresso Nova York, Chelsea Publishing Company, 1965), p. 41.
3. É verdade que no Capítulo 4 nós definimos e como o limite de $(1+1/n)^n$ para valores *inteiros* de n, à medida que $n \to \infty$. A mesma definição se sustenta, entretanto, mesmo quando n tende ao infinito através de todos os valores *reais,* isto é, quando n é uma variável contínua. Isso se origina no fato de que a função $f(x)=(1+1/x)^x$é contínua para todos os $x > 0$.
4. Se a equação característica tiver uma raiz *dupla* m (isto é, duas raízes iguais), podemos demonstrar que a solução da equação diferencial $y=(A+Bt)e^{mt}$. Por exemplo, a equação diferencial $d^2y/d^{t2} - 4dy/dt+4y=0$, cuja equação característica $m^2 - 4m+4=(m-2)^2=0$ tem a raiz dupla $m=2$ e a solução y = $(A+Bt)e^{2t}$. Para maiores detalhes, ver qualquer texto sobre equações diferenciais ordinárias.
5. Este símbolo é um tanto infeliz, porque pode ser facilmente confundido com $1/f(x)$.
6. A razão de restringirmos o domínio de $y=x^2$ para $x \geq 0$ é garantir que dois valores de x não possam nos dar o mesmo y. De outro modo a função não teria um inverso único, já que,

por exemplo, $3^2 = (-3)^2 = 9$. Na terminologia da álgebra, a equação $y = x^2$ para $x \geq 0$ define uma função um-para-um.

7. Este resultado dá origem a uma definição alternativa da função logarítmica natural, como mostramos no Apêndice 5.

O pára-quedista

Entre os numerosos problemas cuja solução envolve a função exponencial, o seguinte *é* particularmente interessante. Um pára-quedista salta de um avião e em $t=0$ abre o seu pára-quedas. Com que velocidade ele chegará ao solo?

Para velocidades relativamente pequenas, podemos considerar que a força de resistência exercida pelo ar é proporcional à velocidade da queda. Vamos chamar a constante de proporcionalidade de k e a massa do pára-quedista de m. Duas forças opostas estarão agindo sobre o pára-quedista: seu peso mg (onde g é a aceleração da gravidade, cerca de 9,8 m/s^2), e a resistência do ar kv (onde $v=v(t)$ *é* a velocidade de queda no tempo t). A força resultante na direção do movimento é assim $F=mg-kv$, onde o sinal de menos indica que a força de resistência age em uma direção oposta à direção do movimento.

A segunda lei do movimento de Newton diz que $F=ma$, onde $a=dv/dt$ *é* a aceleração ou taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. Assim, teremos:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \qquad (1)$$

A equação 1 é a *equação de movimento* do problema. Ela *é* uma equação diferencial linear tendo $v=v(t)$ como a função desconhecida. Podemos simplificar a equação 1 dividindo-a por m e chamando de a a proporção k/m:

$$\frac{dv}{dt}=g-av \qquad \left(a=\frac{k}{m}\right). \qquad (2)$$

Se considerarmos a expressão dv/dt como a proporção entre duas diferenciais, poderemos reescrever a equação 2 de modo que as duas variáveis, v e t, fiquem separadas, uma em cada lado da equação:

$$\frac{dv}{g-av}=dt. \tag{3}$$

Agora integramos cada lado da equação 3 — isto é, encontramos sua antiderivada. Isto nos dá

$$-\frac{1}{a}\ln(g-av)=t+c, \tag{4}$$

onde ln significa logaritmo natural (logaritmo de base e) e c é a constante de integração. Podemos determinar c a partir da *condição inicial:* a velocidade no instante em que o pára-quedas se abre. Chamando esta velocidade de v_0, teremos $v = v_0$ quando $t = 0$. Colocando isto na equação 4 encontramos $-1/a \ln(g - av_0) = 0 + c = c$. Colocando este valor de c de volta na equação 4, teremos, depois de uma ligeira simplificação,

$$-\frac{1}{a}\left[\ln(g-av)-\ln(g-av_0)\right]=t.$$

Mas, pelas regras dos logaritmos temos que $\ln x - \ln y = \ln x/y$, de modo que podemos escrever a ultima equação como

$$\ln\left[\frac{g-av}{g-av_0}\right]=-at. \tag{5}$$

Finalmente, resolvendo a equação 5 para v em relação a t, obtemos

$$v=\frac{g}{a}(1-e^{-at})+v_0e^{-at}. \tag{6}$$

Esta é a solução pedida $v = v(t)$.

Duas conclusões podem ser obtidas da equação 6. Primeira; se o pára-quedista abrir seu pára-quedas imediatamente após saltar do avião, teremos $v_0 = 0$, de modo que o último termo da equação (6) é eliminado. Mas mesmo se ele cair livremente, antes de abrir seu pára-quedas, o efeito da velocidade inicial v_0 =0 diminui exponencialmente conforme o tempo avança. De fato, para $t \to \infty$, a expressão e^{-at} tende a 0 e a *velocidade limite* $v_\infty = g/a = mg/k$ será atingida. Esta velocidade limite *é* independente de v_0; ela depende apenas do peso *mg* do pára-quedista e do coeficiente de resistência *k*. É este fato que torna possível um pouso seguro. Um gráfico da função $v = v(t)$ *é* mostrado na figura 35.

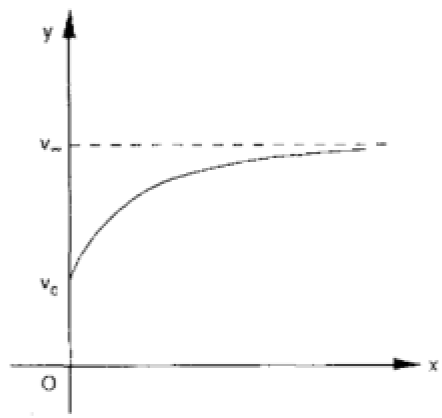


Figura 35. Um pára-quedista em queda através do ar atinge uma velocidade limite v_∞.

As percepções podem ser quantificadas?

Em 1825 o fisiologista alemão Ernst Heinrich Weber (1795-1878) formulou uma lei matemática que se destinava a medir a resposta humana a vários estímulos físicos. Weber fez uma série de experiências nas quais um homem vendado segurava um peso ao qual eram acrescentados, gradualmente, pesos menores. O homem devia responder quando sentisse pela primeira vez o aumento de peso. Weber descobriu que a resposta era proporcional não ao aumento absoluto de peso, mas ao aumento *relativo*. Isto é, se a pessoa ainda pudesse seçtir um aumento no peso de dez para onze libras (um aumento de dez por cento), então, quando o peso original fosse mudado para vinte libras, o patamar de percepção era duas libras (novamente um aumento de 10 por cento). O nível de percepção para um peso de quarenta libras seria quatro libras, e assim por diante. Expresso de modo matemático,

$$ds = k\frac{dW}{W}, \qquad (1)$$

onde *ds* é o aumento perceptível (o menor aumento de peso ainda perceptível), *dW* o aumento de peso correspondente, *W* o peso já existente e *k* uma constante de proporcionalidade.

Weber então generalizou sua lei para incluir *qualquer* tipo de sensação fisiológica, como uma dor sentida em resposta a uma pressão física, a percepção do brilho causado por uma fonte de luz, ou a percepção do volume de uma fonte de som. A lei de Weber foi mais tarde popularizada pelo médico alemão Gustav Theodor Fechner (1801-1887) e tornou-se conhecida como a lei de Weber-Fechner.

Matematicamente a lei de Weber-Fechner, como está expressa na equação 1, é uma equação diferencial. Integrando-a, teremos

$$s = k \ln W + C, \qquad (2)$$

onde ln é o logaritmo natural e C a constante de integração. Se chamarmos de W_0 o mais baixo nível de estímulo físico, aquele que quase não provoca uma resposta (o nível limite), teremos s =0 quando $W = W_0$, de modo que $C = - k \ln W_0$. Colocando isto de novo na equação 2 e levando em conta que $\ln W - \ln W_0 = \ln W/W_0$, finalmente chegamos a

$$s = k \ln \frac{W}{W_0}. \qquad (3)$$

Isso mostra que a resposta segue uma lei logarítmica. Em outras palavras, para que a resposta aumente em proporções iguais, o estímulo correspondente deve aumentar a uma *taxa* constante, isto *é,* em progressão geométrica.

Embora a lei de Weber-Fechner pareça aplicar-se a uma grande variedade de respostas fisiológicas, sua validade universal tem sido discutida. Enquanto os estímulos físicos são quantidades objetivas, que podem ser medidas com precisão, a resposta humana a eles é uma questão subjetiva. Como podemos medir o sentimento de dor? Ou a percepção de calor? Existe uma sensação, entretanto, que *pode* ser medida com grande precisão: a sensação de volume ou tonalidade musical. O ouvido humano é um órgão extremamente sensível, capaz de notar uma mudança de tonalidade causada por uma alteração de freqüência de apenas 0,3 por cento. Músicos profissionais são agudamente conscientes do menor desvio da tonalidade correta e mesmo um ouvido não treinado pode facilmente perceber quando uma nota está errada em um quarto de tom ou menos.

Quando a lei de Weber-Fechner é aplicada à tonalidade, ela diz que intervalos musicais iguais (aumentos na tonalidade) correspondem a aumentos *fracionais* iguais na freqüência. Daí os intervalos musicais corresponderem a *relações* de freqüência. Por exemplo, uma oitava corresponde à proporção 2:1 na freqüência, uma quinta à proporção 3:2, uma quarta a 4:3 e assim por diante. Quando ouvimos uma série de notas separadas por oitavas, sua freqüência na verdade aumenta em uma progressão 1, 2, 4, 8, e assim por diante (fig. 36).

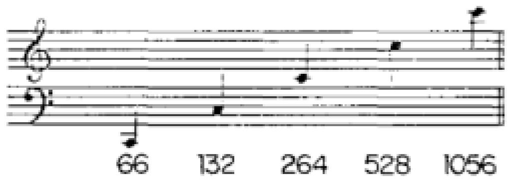


Figura 36. Notas musicais separadas por intervalos iguais correspondem a freqüências em uma progressão geométrica. As freqüências estão em ciclos por segundo.

Como resultado, a pauta onde as notas musicais são escritas *é* na verdade uma escala logarítmica na qual a distância vertical (tom) é proporcional ao logaritmo da freqüência.

A sensibilidade extraordinária do ouvido humano, para perceber mudanças de freqüência é igualada por sua capacidade de audição — indo de 20 ciclos por segundo até cerca de 20 mil (o limite exato varia com a idade). Em termos de tonalidade, isto corresponde a cerca de dez oitavas (uma orquestra raramente usa mais de sete). Em comparação, o olho é sensível a um espectro de freqüência que vai de 4.000 a 7.000 angstroms (10~^{8} cm) — uma faixa de menos de duas "oitavas".

Entre os muitos fenômenos que seguem a escala logarítmica, devemos também mencionar a escala decibel de ruído, a escala de brilho das magnitudes estelares,[1] e a escala Richter que mede a intensidade dos terremotos.

NOTA

1. Ver, entretanto, "Origins oftheStellar Magnitude Scale", de John B. Heamshow, em *Sky and Telescope* (novembro de 1992); "How We Perceive Star Brightness", de AndrewT. Young, *em. Sky and Telescope* (março de 1990) e "To Honor Fechner and Repeal his Law", de S. S. Stevens, na *Science* (janeiro de 1961).

11

e^{Θ}: Spira mirabilis

Eadem mutata resurgo.
(Embora mudado, devo me erguer o mesmo.)
– JAKOB BERNOULLI

Um ar de mistério sempre envolve os membros de uma dinastia. Rivalidades entre irmlos, lutas pelo poder e tendências familiares que passam de uma geração a outra são a matéria-prima de incontáveis novelas e romances históricos. A Inglaterra tem suas dinastias reais, a América seus Kennedys e Rockefellers. Mas no mundo intelectual é raro encontrar uma família que, geração após geração, produz mentes criativas do mais alto nível, todas no mesmo campo. Dois nomes surgem na mente: a família Bach na música e os Bernoullis na matemática.

Os ancestrais da família Bernoulli fugiram da Holanda em 1583 para escapar da perseguição católica aos huguenotes. Eles fixaram residência em Basiléia, a calma cidade universitária nas margens do rio Reno, onde as fronteiras da Suíça, Alemanha e França se encontram. Os membros da família primeiro se estabeleceram como mercadores bem-sucedidos, mas os Bernoullis mais jovens se sentiam irresistivelmente atraídos pela ciência. Eles dominariam o cenário matemático da Europa nos últimos anos do século XVII e durante a maior parte do século XVIII.

Inevitavelmente as pessoas comparam os Bernoullis com os Bachs. As duas famílias foram quase exatamente contemporâneas e ambas permaneceram ativas por cerca de 150 anos. Mas também existem grandes diferenças. Em especial, um membro da família Bach se ergue mais alto do que todos os outros, Johann Sebastian. Seus ancestrais e seus filhos foram todos músicos talentosos e alguns, como Carl Philip Emanuel e Johann Christian tornaram-se compositores bem conhecidos; mas todos são eclipsados pela figüra grandiosa de Johann Sebastian Bach.

No caso dos Bernoullis, não apenas um, mas três se destacam sobre todos os demais: os irmãos Jakob e Johann, e o segundo filho deste último, Daniei. Enquanto a família Bach vivia reunida em harmonia, com os pais, tios e filhos todos se dedicando pacificamente à arte da música, os Bernoullis eram conhecidos por suas rivalidades e brigas — entre eles e também com os outros. Ao tomarem o partido de Leibniz na disputa sobre a invenção do cálculo, eles se meteram em numerosas controvérsias. Mas nada disso parece ter exercido qualquer efeito sobre a vitalidade da família. Seus membros, pelos menos oito deles, conseguiram se destacar na matemática. Tinham sido agraciados com uma criatividade inesgotável e fizeram contribuições para todos os campos da matemática e da física de sua época (ver fig. 37). E enquanto Johann Sebastian Bach simboliza o clímax da era barroca, levando para um grande final um período da música que durou quase dois séculos, os Bernoullis fundaram várias áreas *novas* da matemática, entre elas a teoria da probabilidade e o cálculo das variações. Como os Bachs, os Bernoullis foram grandes mestres e foi através de seus esforços que o cálculo, recém-inventado, tornou-se conhecido em toda a Europa continental.

O primeiro dos Bernoullis a se destacar na matemática foi Jakob (também conhecido como Jacques ou James). Nascido em 1654, recebeu um grau em filosofia da Universidade da Basiléia em 1671. Rejeitando a carreira eclesiástica que seu pai Nicolaus desejara para ele, Jakob seguiu seus interesses na matemática, física e astronomia, declarando: “Contra a vontade de meu pai eu estudarei as estrelas.” Ele viajou e manteve intensa correspondência, encontrando-se com os principais cientistas de sua época, entre eles Robert Hooke e Robert Boyle. Desses encontros Jakob aprendeu os últimos desenvolvimentos na física e na astronomia. Em 1683 ele retornou a sua cidade natal para aceitar um cargo de professor na Universidade de Basiléia, que exerceu até sua morte em 1705.

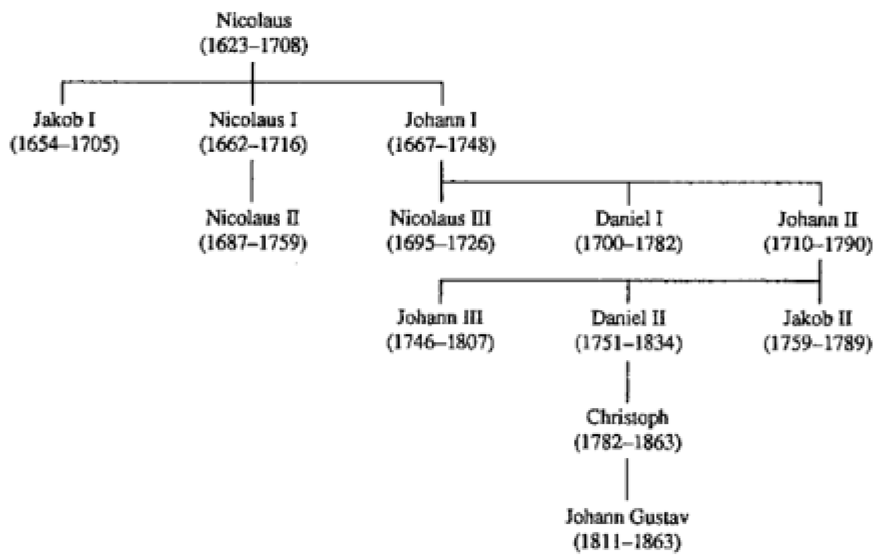


Figura 37. A árvore genealógica da família Bernoulli.

O segundo irmão de Jakob, Johann (também conhecido como Johannes, John ou Jeanne) nasceu em 1667. Como Jakob, ele desafiou a vontade do pai que queria envolvê-lo nos negócios da família. Primeiro estudou medicina e humanidades, mas logo foi atraído pela matemática. Em 1683 ele foi morar com Jakob e daí em diante suas carreiras se entrelaçaram. Juntos, estudaram o cálculo recém-inventado, uma tarefa que consumiu seis anos. Devemos lembrar que, naqueles dias, o cálculo era um campo inteiramente novo, de domínio muito difícil até mesmo para os matemáticos profissionais — inclusive porque os livros-texto sobre o assunto ainda não existiam. Assim, os dois irmãos não tinham nada em que se basear, exceto sua própria perseverança e sua correspondência ativa com Leibniz.

Assim que dominaram o assunto eles passaram a transmitir o seu conhecimento, dando aulas particulares para vários matemáticos importantes. Entre os alunos de Johann estava Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704), que escreveu o primeiro livro-texto sobre cálculo, *Analyse des infiniment petits* (Análise dos infinitamente pequenos), publicado em Paris em 1696. Neste trabalho L'Hospital apresentou uma regra para calcular expressões indeterminadas da forma 0/0 (ver a pág. 50). Mas a "Regra de L'Hospitai", como ficou conhecida (faz parte, agora, de qualquer curso padrão de cálculo) foi, na verdade, descoberta por Johann.

Normalmente, um cientista que publicasse sob seu nome uma descoberta feita por outro, seria chamado de plagiador, mas nesse caso tudo se passou legalmente. Os dois tinham assinado um contrato permitindo que UHospital, em troca do dinheiro pago pelas aulas de Johann, também pudesse usar as descobertas do professor, se assim quisesse. O livro de UHospital tornou-se popular na Europa e contribuiu muito para a difusão do cálculo nos círculos intelectuais.[1]

À medida que a fama dos irmãos Bernoulli aumentava, suas disputas cresciam. Parece que Jakob ficou irritado com o sucesso de Johann, enquanto este se ressentia pela atitude condescendente do irmão mais velho. A situação piorou quando cada um resolveu, independentemente, um problema de mecânica que fora proposto pelo próprio Johann em 1696: encontrar a curva ao longo da qual uma partícula deslizará sob a força da gravidade no tempo mais curto possível. Este famoso problema é conhecido como o problema da *braquistócrona* (das palavras gregas que significam "tempo mais curto"). Galileu já o tinha abordado, acreditando, erradamente, que a curva exigida era um arco de círculo. Johann apresentou o problema para "os matemáticos mais inteligentes do mundo" e deu seis meses para que qualquer deles encontrasse uma solução. Cinco soluções corretas foram apresentadas: por Newton, Leibniz, UHospital e os dois irmãos Bernoulli. A curva pedida revelou-se um *ciclóide*, a curva traçada por um ponto na borda de uma roda, à medida que ela rola por uma superfície horizontal (fig. 38).

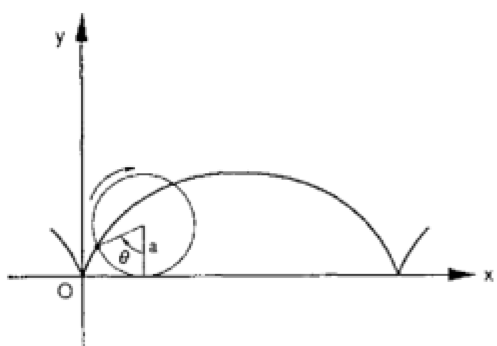


Figura 38. Ciclóide.

A forma graciosa desta curva e suas singulares propriedades geométricas já tinham intrigado vários matemáticos anteriores. Alguns anos antes, em 1673, Christian Huygens descobrira que a ciclóide era a solução para outro problema famoso, o do *tautócrona*: encontrar a curva ao longo da qual uma partícula, movendo-se sob a força da gravidade, levará o mesmo tempo para chegar ao ponto final, independente de onde foi o ponto inicial. (Huygens usou o resultado para construir um relógio, fazendo a extremidade superior de um pêndulo oscilar entre dois ramos de uma ciclóide, o que fazia o período ser sempre o mesmo, independente da amplitude das oscilações.) Johann ficou empolgado ao descobrir que a mesma curva era a solução de ambos os problemas: "Mas você ficará petrificado de espanto quando eu disser que exatamente esta mesma ciclóide, a tautócrona de Huygens, é a braquistócrona que estamos procurando."[2] Este entusiasmo transformou-se em uma amarga animosidade pessoal.

Embora os dois irmãos tivessem chegado à mesma solução independentemente, eles usaram métodos bem diferentes. Johann baseou-se em um problema análogo da ótica: encontrar a curva descrita por um raio de luz à medida que viaja através de camadas sucessivas de materiais de densidade crescente. A solução faz uso do Princípio de Fermat, o qual diz que a luz sempre segue o caminho mais rápido (que náo é a mesma coisa que a menor distância, a tinha reta). Hoje em dia os matemáticos não aceitariam de bom grado uma solução que depende muito de princípios da física; mas no final do século XVII a divisão entre a matemática pura e as ciências físicas não era levada tão a sério e os desenvolvimentos em uma disciplina influenciavam fortemente a outra.

A abordagem de Jakob foi mais matemática. Usou um novo ramo da matemática desenvolvido por ele mesmo: o cálculo das variações, uma extensão do cálculo comum. Um problema básico no cálculo comum é encontrar os valores de $x$que maximizam ou minimizam uma dada função $y = f(x)$. O cálculo das variações estende este problema à busca de uma *função* que maximize ou minimize uma integral definida (uma dada área, por exemplo). Este problema conduz a uma certa equação diferencial cuja solução é a função procurada. A braquistócrona foi um dos primeiros problemas aos quais o cálculo de variações foi aplicado.

A soluçáo de Johann, embora correta, usava uma derivação errada. Johann mais tarde tentou substituí-la pela derivação correta de Jakob, apresentando-a como sua. O caso se convertou numa troca de críticas que logo se acirrou. Johann, que era professor na Universidade de Groningen, na Holanda, jurou que não voltaria para a Basiléia enquanto o irmão estivesse vivo. Quando jakob morreu, em 1705, Johann aceitou a cadeira de seu irmão na universidade, mantendo o posto até morrer em 1748, com 80 anos de idade.

ooo

Para enumerar, ainda que superficialmente, as realizações dos Bernoullis, seria necessário um livro inteiro.[3] Talvez a maior obra de Jakob tenha sido o seu tratado sobre a teoria das probabilidades, o *Ars conjectandi* (A arte da conjectura), publicado postumamente em 1713. Esse trabalho influente representa para a teoria da probabilidade o mesmo que os *Elementos* de Euclides representam para a geometria. Jakob também realizou um trabalho significativo sobre as séries infinitas e foi o primeiro a lidar com a questão crucial da convergência. (Como já vimos, Newton estava ciente dessa questão, mas abordou as séries infinitas de um modo puramente geométrico.) Ele provou que a série $1/1^2+1/2^2+1/3^2+\ldots$ converge, mas foi incapaz de encontrar a soma (somente em 1736 Euler determinou que ela é igual a $\pi^2/6$). Jakob também realizou um trabalho importante com as equações diferenciais, utilizando-as para resolver numerosos problemas geométricos e mecânicos. Ele introduziu as coordenadas polares na geometria analítica e usou-as para descrever várias curvas do tipo da espiral (mais sobre isso, adiante). Foi o primeiro a usar o termo *cálculo integral* para o ramo do cálculo que Leibniz originalmente chamara de "o cálculo do somatório". E Jakob foi também o primeiro a mostrar uma conexão entre $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n$ e o problema do juro composto contínuo. Ao expandir a expressão $(1+1/n)^n$ de acordo com o teorema binomial (ver a pág. 55), ele mostrou que o limite deve se encontrar entre 2 e 3.

O trabalho de Johann Bernoullí cobriu as mesmas áreas, em geral, estudadas por Jakob: equações diferenciais, mecânica e astronomia. Na controvérsia Newton-Leibniz, ele serviu como porta-voz do último. Também apoiou a velha teoria cartesiana dos vórtices, contra a teoria gravitacional mais recente de Newton. Johann fez ainda importantes contribuições à mecânica contínua — elasticidade e mecânica dos fluidos — e, em 1738, publicou seu livro *Hydraulica.* Esse trabalho, entretanto, logo foi eclipsado pelo tratado do seu filho Daniel, *Hydrodynamica,* publicado no mesmo ano. Nele, Daniel (1700-1782) formulou a famosa relação entre pressão e velocidade de um fluido em movimento, uma relação conhecida por todos os estudantes de aerodinâmica como Lei de Bernoulli. Ela é a base para a teoria do vôo.

Exatamente como o pai de Johann, Nicolaus, quisera que seu filho seguisse a carreira de mercador, assim o próprio Johann destinou a mesma carreira para Daniel. Mas Daniel estava determinado a seguir seus interesses em matemática e física. O relacionamento entre Johann e Daniel não era melhor do que entre Johann e seu irmão Jakob. Três vezes Johann ganhou o cobiçado prêmio bianual da Academia de Ciências de Paris, a terceira vez junto com o filho Daniel (que, sozinho, ganharia o prêmio dez vezes), Johann ficou tão amargurado, por ter que dividir o prêmio com Daniel, que expulsou o filho de casa. Novamente a família justificava sua reputação de misturar o talento matemático com brigas pessoais.

Os Bernoullis continuaram ativos na matemática por mais cem anos. Foi só em meados dos 1800 que a criatividade da família finalmente acabou. O último matemático dos Bernoullis foi Johann Gustav (1811-1863), bisneto do irmão de Daniel, Johann II. Ele morreu no mesmo ano que seu pai, Christoph (1782-1863). É interessante notar que o último músico da família Bach, Johann Philipp Bach (1752-1846), organista e pintor, também morreu na mesma época.

Terminamos este breve resumo dos Bernoullis com uma história que, como tantas outras sobre grandes personalidades, pode ou não ter acontecido. Enquanto viajava, certo dia, Daniel Bernoulli encontrou um estranho com quem conversou animadamente. Algum tempo depois ele se apresentou modestamente: “Eu sou Daniel Bernoulli.” E o estranho, achando que estavam brincando com ele, respondeu: “E eu sou Isaac Newton.” Daniel adorou esse cumprimento não intencional.[4]

ooo

Entre as muitas curvas que intrigaram os matemáticos, desde que Descartes apresentou a geometria analítica em 1637, duas tiveram um lugar especial: a ciclóide (mencionada anteriormente) e a espiral logarítmica. Esta última era a favorita de Jakob Bernoulli, mas antes de tratarmos dela devemos dizer algumas palavra: sobre as coordenadas polares. Foi idéia de Descartes localizar um ponto *P* no plano dando suas distâncias em relação a duas linhas (os eixos dos *x* e dos *y).* Mas também podemos localizar *P* dando sua distância *r* de um ponto fixo *O,* chamado de *pólo* (geralmente escolhido como a origem do sistema de coordenadas) e o ângulo Θ entre a linha *OP ca* linha de referência fixa, digamos o eixo dos *x.* (fig. 39). Os dois números (r, Θ) são as *coordenadas polares* de *P,* assim como *(x, y)* são as coordenadas retangulares. A princípio tal sistema de coordenadas pode parecer estranho, mas na realidade ele é muito comum—pense em como um controlador de tráfego aéreo determina a posição de um avião na tela do radar.

Exatamente como a equação $y = f(x)$ pode ser interpretada geometricamente como a curva descrita por um ponto móvel, com coordenadas retangulares *(x, y),* a equação $r = g(\Theta)$ pode ser considerada como a curva de um ponto móvel com coordenadas polares (r, Θ). Devemos notar, contudo, que a mesma equação descreve curvas bem diferentes quando interpretada em coordenadas retangulares ou polares; por exemplo, a equação $y = 1$ descreve uma linha horizontal, enquanto a equação $r = 1$ descreve um círculo de raio 1, centrado na origem. De modo inverso, o mesmo gráfico tem equações diferentes quando expresso em coordenadas retangulares ou polares: o círculo que acabamos de mencionar tem a equação polar $r = 1$, mas a equação retangular é $x^2+y^2 = 1$. Que sistema de coordenadas usamos é meramente uma questão de conveniência. A figura 40 mostra uma curva em forma de 8 conhecida como a lemniscata de Bernoulli (batizada em homenagem a Jakob),

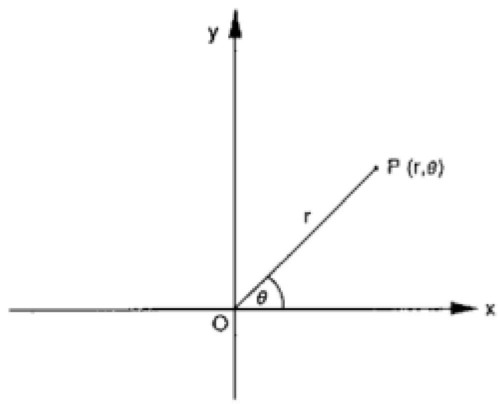


Figura 39. Coordenadas polares.

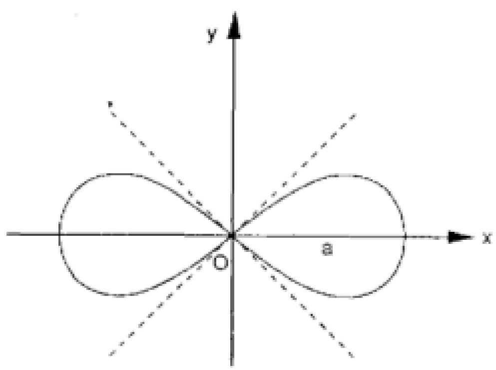


Figura 40. A lemniscata de Bernoulii.

cuja equação polar $r^2 = a^2 \cos 2\Theta$ é muito mais simples do que a equação retangular $(x^2+y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

As coordenadas polares eram usadas ocasionalmente antes da época de Bernoulli, e Newton, em seu *Método dasfluxões,* as menciona como um dos oito sistemas de coordenadas diferentes adequados para descrever curvas espirais. Contudo, foi Jakob Bernoulli quem fez o primeiro uso extenso das coordenadas polares, aplicando-as a um conjunto de curvas e encontrando suas várias propriedades. Primeiro, entretanto, ele tinha que formular essas propriedades — a inclinação de uma curva, sua curvatura, comprimento de arco, área e assim por diante — em termos de coordenadas polares, enquanto Newton e Leibniz tinham expresso essas mesmas propriedades em termos de coordenadas retangulares. Agora é uma tarefa fácil, dada como exercício rotineiro no primeiro ano do curso de cálculo, Na época de

Bernoulli significava abrir caminho em uma área nova.

A transformação em coordenadas polares permitiu a Jakob investigar numerosas curvas novas, o que ele fez com grande entusiasmo. Sua curva favorita, como já mencionamos, era a espiral logarítmica. Sua equação é ln $r = a\Theta$, onde *a é* uma constante e ln é o logaritmo natural ou "hiperbólico", como então era chamado. Hoje em dia essa equação é geralmente escrita de forma inversa, $r = e^{4\Theta}$, mas na época de Bernoulli a função exponencial ainda nío era considerada como uma função independente (o número e nem tinha ainda um símbolo especial). Como é prática no cálculo, medimos o ângulo Θ não em graus, mas em *radianos,* que é uma medida circular. Um radiano é o ângulo medido no centro de um círculo de raio r, que compreende um arco de comprimento igual a r ao longo da circunferência (fig. 41), Como a circunferência de um círculo é $2\pi r$, existem, exatamente 2π ($\approx$ 6,28) radíanos em uma rotação completa. Ou seja, 2π radianos =360°, de onde se segue que um radiano é igual a 360°/2π, ou, aproximadamente, 57°.

Se piorarmos a equação $r = e^{a\Theta}$ em coordenadas polares, obteremos a curva mostrada na figura 42, a espiral logarítmica. A constante a determina a taxa de crescimento da espiral. Se a for positivo, a distância r em relação ao pólo *aumenta* enquanto giramos no *sentido contrário aos ponteiros do relógio,* resultando em uma espiral voltada para a esquerda. Se a for negativo, *r diminui* e temos uma espiral voltada para a direita. As curvas $r = e^{a\Theta}$ e $r = e^{-a\Theta}$ são, assim, imagens de espelho, uma da outra (fig. 43).

Talvez a característica individual mais importante da espiral logarítmica seja que, se aumentarmos o ângulo Θ em incrementos iguais, a distância r do pólo aumenta em *proporções* iguais, isto é, em uma progressão geométrica. Isto deriva da identidade $e^{a(\Theta+\varphi)} = e^{a\Theta}.\ e^{a\varphi}$ o fator $e^{a\varphi}$ agindo como uma taxa comum. Em especial, se levarmos a espiral através de uma série de voltas completas (isto é, aumentando Θ por intermédio de múltiplos de 2π), poderemos medir as distâncias ao longo de qualquer raio emanando de O e observar seu crescimento geométrico.

Se seguirmos a espiral para dentro, a partir de qualquer ponto fixo P sobre ela, teremos que descrever um número infinito de rotações antes de chegarmos ao pólo, mas, surpreendentemente, a distância total coberta será finita. Esse fato notável foi descoberto em 1645 por Evangelista Torricelli (1608-1647), um discípulo de Galileu conhecido, principalmente, por suas experiências na física. Ele mostrou que o comprimento do arco de *P* ao pólo é igual ao comprimento da linha tangente à espiral em *P,* medida entre *P* e o eixo dos *y* (fig. 44).

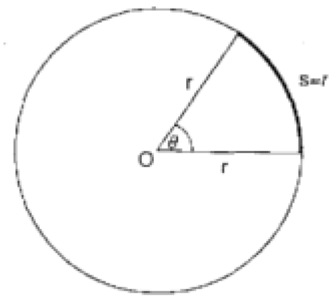


Figura 41. Uma medida em radiano.

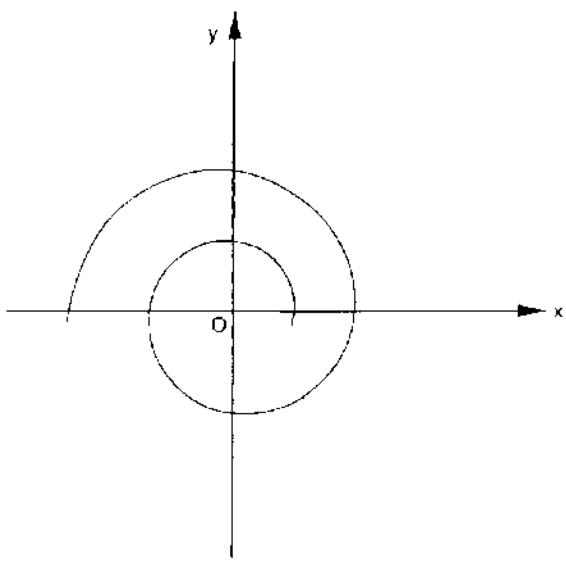


Fig. 42. Logarithmic spíral.

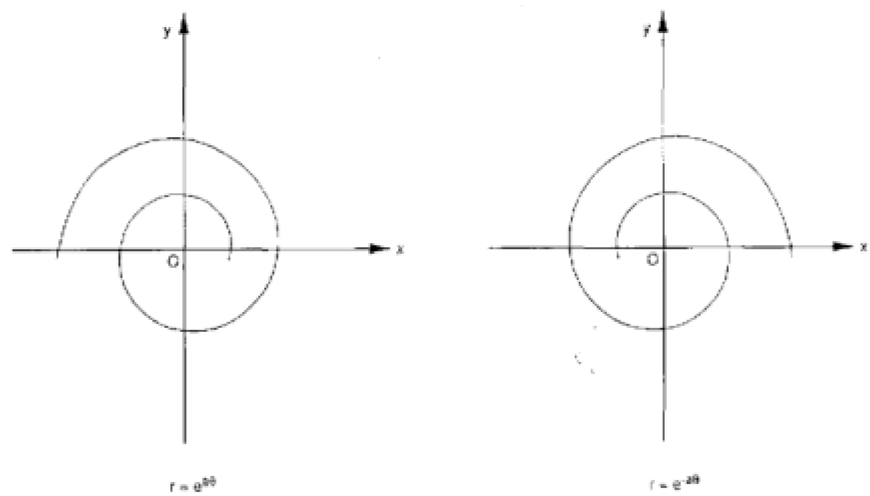


Figura 43. Espirais no sentido esquerdo e direito.

Torricelli tratou a espiral como uma sucessão de raios, aumentando em progressão geométrica enquanto Θ aumenta aritmeticamente, o que é reminiscente da técnica usada por Fermat para encontrar a área sob a curva $y = x^n$

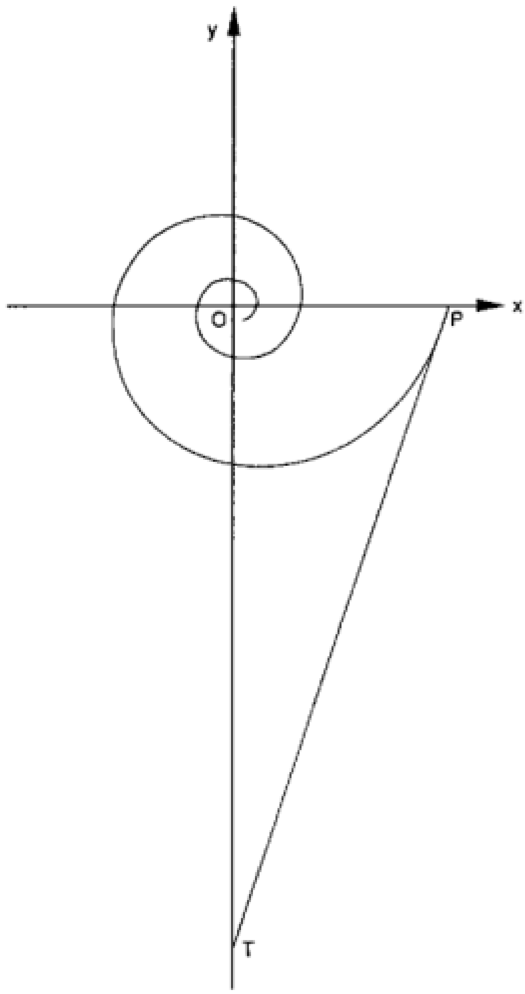


Figura 44. Retificação de uma espiral logarítmica: a distância *PT* é igual ao comprimento do arco *de P a O.*

(Com a ajuda do cálculo integral, é claro, o resultado torna-se muito mais fácil de obter; ver o Apêndice 6.) Seu resultado foi a primeira *retificação* conhecida — encontrar o comprimento de um arco — de uma curva não algébrica.

Algumas das propriedades mais notáveis da espiral logarítmica dependem do fato de que a função e*é igual à sua própria derivada. Por exemplo, *cada Unha reta através do pólo atravessa a espiral com o mesmo ângulo* (fig. 45; a prova desta propriedade é dada no Apêndice 6). Além disso, a espiral logarítmica é a *única* curva que tem essa propriedade; por isso também é conhecida como *espiral eqüiangular.* Isso faz da espiral uma parente próxima do círculo, para o qual o ângulo de interseção é 90°.

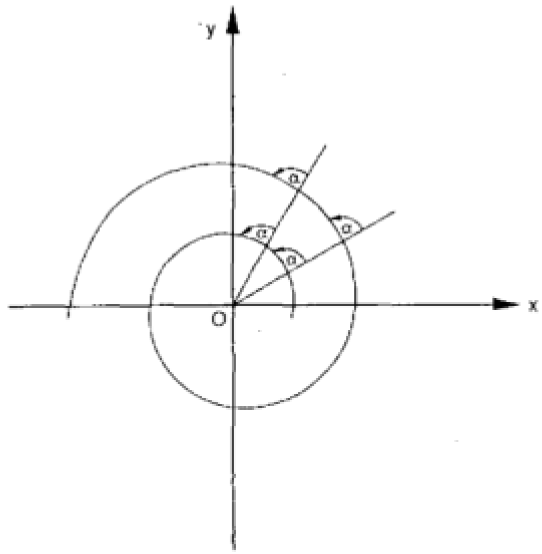


Figura 45. A propriedade eqüiangular da espiral logarítmica: cada linha através do pólo *O* atravessa a espiral com o mesmo ângulo.

De fato, o círculo é uma espiral logarítmica cuja taxa de crescimento é 0: colocando a =0 na equação $r = e^{\Theta}$, teremos $r = e^{0} = 1$, a equação polar do círculo unitário.

O que mais empolgava Jakob Bernoulli em relação à espiral logarítmica era o fato de ela permanecer *invariável* — imutável — na maioria das transformações da geometria. Considere, por exemplo, a transformação da inversão. Um ponto *P* cujas coordenadas polares são (r, Θ) é “mapeado” sobre um ponto Q com coordenadas polares (l/r, Θ) (fig. 46), Geralmente a forma de uma curva muda drasticamente numa inversão; por exemplo, a hipérbole $y = 1/x$ se transforma na lemniscata de Bernoulli, como vimos anteriormente. Isso não chega a surpreender, já que mudar r para $1/r$ significa que os pontos muito próximos de *O* tornam-se muito distantes e vice-versa. Mas isso não acontece com a espiral logarítmica: mudar r para 1 *ir* meramente muda a equação $r = e^{a\Theta}$ para $r = 1/e^{a\Theta} = e^{-a\Theta}$, cujo gráfico é uma imagem invertida da espiral original.

Assim como uma inversão transforma determinada curva em uma nova, podemos obter uma nova curva construindo a *evoluta* da curva original. Este conceito envolve o centro de curvatura da curva. Como mencionado anteriormente a *curvatura* de cada ponto da curva é uma medida da taxa com que a curva muda de direção naquele ponto; é um número que varia de ponto para ponto (tal como a inclinação de uma curva muda de ponto para ponto)

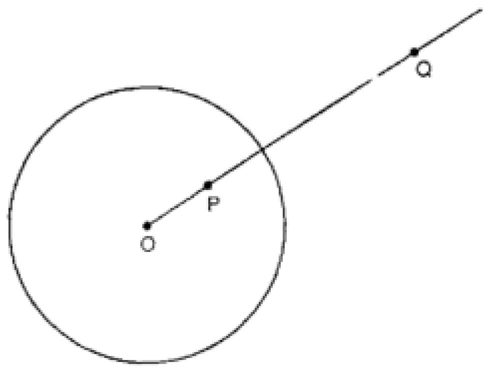


Figura 46. Inversão no círculo unitário; $\Theta P.\ OQ = 1$.

e é*,* portanto, função de uma variável independente. A curvatura é simbolizada pela letra grega k (capa); sua recíproca $1/k$*,* é chamada de *raio de curvatura,* sendo simbolizada pela letra ρ (rô). Quanto menor for ρ, maior será a curvatura naquele ponto e vice-versa. Uma linha reta tem uma curvatura 0, daí que o raio de sua curvatura é infinito. Um círculo tem uma curvatura constante e seu raio de curvatura é simplesmente o seu raio.

Se traçarmos uma linha perpendicular à linha tangente em cada ponto de uma curva (sobre seu lado côncavo) e, ao longo dela, medirmos a distância igual ao raio de curvatura naquele ponto, chegaremos ao *centro de curvatura* daquele ponto (fig. 47).

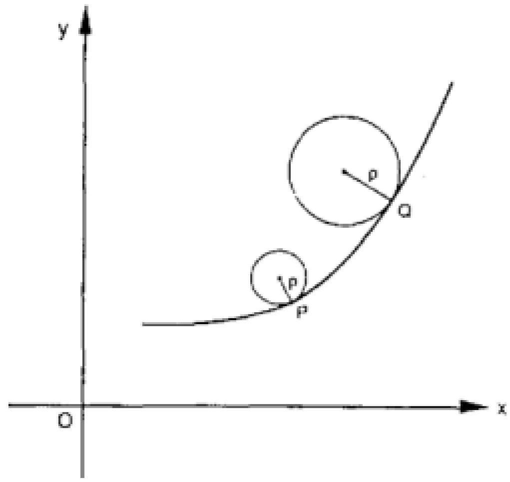


Figura 47. Raio e centro de curvatura.

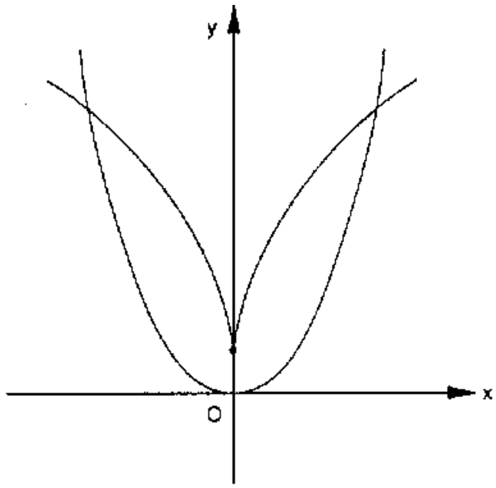


Figura 48. Evoluta de uma parábola.

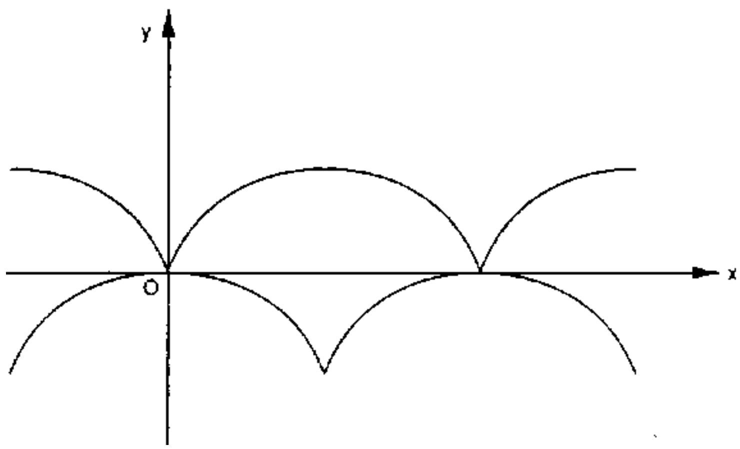


Figura 49. A evoluta de uma ciclóide é uma ciclóide idêntica, mas deslocada em relação à primeira.

A evoluta é a linha dos centros de curvatura da curva original, à medida que nos movemos ao longo dela. Geralmente a evoluta *é* uma nova curva, diferente daquela da qual foi gerada. Por exemplo, a evoluta da parábola $y = x^2$ *é* uma parábola semicábica, uma curva cuja equação tem a forma $y = x^{2/3}$ (fig. 48). Mas como Jakob Bernoulli descobriu, para sua grande satisfação, a espiral logarítmica é a sua própria evoluta. (A ciclóide também tem esta propriedade, mas a evoluta de uma ciclóide é uma segunda ciclóide, idêntica à primeira, porém deslocada em relação a ela (fig. 49), enquanto a evoluta de uma espiral logarítmica é a mesma espiral.) Ele também descobriu que a *curva pedal* de uma espiral logarítmica — encontro das projeções perpendiculares do pólo às linhas tangentes de uma dada curva — é novamente a mesma espiral. E, como se isso não fosse bastante, descobriu que a *cáustica* de uma espiral logarítmica — o invólucro formado pelos raios de luz emanando do pólo e refletidos pela curva — é, novamente, a mesma espiral.

Jakob ficou tão impressionado com essas descobertas que desenvolveu uma reverência quase mística em relação à sua amada curva: "Como esta maravilhosa espiral, com sua peculiaridade tão singular e encantadora … sempre produz uma espiral semelhante a ela mesma, de fato precisamente a mesma espiral, não importa como tenha sido refletida, refratada, evoluída ou involuída … ela pode ser usada como um símbolo, ou de constância na adversidade, ou do corpo humano, que depois de todas as suas mudanças, mesmo depois da morte, será restaurado à sua forma exata e perfeita."[5] Ele a batizou de *spira mirabilis* (a espiral maravilhosa) e'expressou seu desejo de que uma espiral logarítmica fosse gravada em sua lápide com a inscrição, *Eadem mutata resurgo* (Embora mudado, devo me erguer o mesmo), na tradição de Arquimedes, que, de acordo com a lenda, pediu que uma esfera, com um círculo circunscrito, fosse gravada em sua tumba. O desejo de Jakob quase foi atendido. Fosse por ignorância, ou para tornar sua tarefa mais fácil, o pedreiro de fato talhou uma espiral na tumba, mas é uma espiral de Arquimedes e não uma espiral logarítmica. (Na espiral de Arquimedes, ou linear, cada volta sucessiva aumenta a distância em relação ao pólo através de *uma diferença* constante e não uma taxa; os sulcos num disco de vinil descrevem uma espiral linear.) Os visitantes do claustro, na catedral de Münster, em Basiléia, ainda podem ver o resultado (fig. 50), que, sem dúvida, teria feito Jakob rolar em sua tumba.

NOTAS E FONTES

1. Ver Capítulo 9, nota 9.
2. Citado em *Men of Mathematics,* de Eríc Temple Bell, 2 vols. (1937, reimpressão Harmondsworth: Penguin Books, 1965), 1:146.
3. A editora suíça Birkháuscr assumiu a tarefa de publicar todo o trabalho científico da família Bernoulli e sua correspondência.

Bell em *MenofMathematics,* 1:150; ver também *OnMatkematicsandMathematicians (Memorabilia Matbematica),* de Robert Edouard Moritz (1914; reimpressão Nova York: Dover, 1942), p. 143

Citado em *The Uses ofMathesis,* deThomasHill, Biblioteca Sacra, vol, 32, pp. 515-516, como citado por Moritz em *On Mathematics and Matbematicians,* pp. 144-145.

Figura 50. A lápide de Jakob Bernoulli em Basiléia. Reproduzido com a permissão de Birkhäuser Verlag AG, Basiléia.

Um encontro histórico entre J. S. Bach e Johann Bernoulli

Será que algum membro da família Bach algum dia encontrou um dos Bernoullis? É pouco provável. Viajar em pleno século XVII era um empreendimento que só se realizava por motivos extremos. Descontando-se um encontro casual, a única razáo imaginável para tal encontro teria sido uma curiosidade intensa pela atividade do outro, e não há evidência disso. Não obstante, o pensamento de que tal encontro pudesse acontecer é fascinante. Vamos imaginar uma reunião entre Johann Bernoulli (ou seja, Johann I) e Johann Sebastían Bach. O ano é 1740 e cada um dos dois encontra-se no auge de sua fama. Bach, aos 55 anos, é compositor, organista e Kapellmeister (diretor musical) na igreja de São Tomás, em Leipzig. Bernoulli, com 73, é o mais notável professor da Universidade da Basiléia. O encontro acontece em Nuremberg, a meio caminho entre as cidades onde os dois vivem.

BACH: Herr professor, eu fico muito feliz por encontrá-lo afinal, tendo ouvido falar tanto sobre suas extraordinárias conquistas.

BERNOULLI: Estou igualmente contente em encontrá-lo, Herr Kapellmeister. Sua fama como compositor e organista já chegou muito além do Reno. Mas diga-me, meu trabalho realmente lhe interessa? Quero dizer, os músicos geralmente não são versados em matemática, ou são? E para dizer a verdade, meu interesse na música é inteiramente teórico; por exemplo, há algum tempo, eu e meu filho Daniel fizemos alguns estudos sobre a teoria das cordas vibratórias. Este é um novo campo de pesquisa que envolve o que nós chamamos, em matemática, de mecânica do continuum.[1]

BACH: De fato, eu também tenho me interessado pelo modo como as cordas vibram. Como sabe, também toco o cravo, cujo som é produzido golpeando-se as cordas através de teclas. Durante anos fui incomodado por um problema técnico com esse instrumento que só recentemente pude resolver.

BERNOULLI: E que problema era esse?

BACH: Como sabe, nossa escala musical comum *é* baseada nas leis das cordas vibratórias. Os intervalos que usamos na música— a oitava, quinta, quarta, e assim por diante — são todos derivados dos harmônicos, ou sobretons de uma corda — cujos tons mais altos e fracos estão sempre presentes quando a corda vibra. As freqüências desses harmônicos são múltiplos inteiros da freqüência fundamental (mais baixa), e assim formam a progressão 1, 2, 3, 4 … [fig. 51]. Os intervalos da nossa escala correspondem a *proporções* entre esses números: 2:1 no caso da oitava, 3:2 para a quinta, 4:3 para a quarta e assim por diante. A escala formada a partir dessas proporções é chamada de *escala de modulação exata.*

Figura 51. A série de harmônicos ou sobretons emitidos por uma corda vibrando. Os números indicam as freqüências relativas das notas.

BERNOULLI: O que se encaixa perfeitamente no meu amor por seqüências ordeiras de números.

BACH: Mas existe um problema. A escala construída a partir dessas proporções consiste em três intervalos básicos: 9:8, 10:9 e 16:15 [fig. 52]. Os dois primeiros são quase idênticos e cada um é conhecido como tom inteiro, ou um *segundo* (assim chamado porque leva à segunda nota na escala). A última proporção é muito menor e chamada de *semitom.* Agora, se você começar com a nota dó e for subindo na escala dó – ré – mi – fá – sol – lá – si – dó-maior, o primeiro intervalo, de dó a ré, é um tom inteiro cuja taxa de freqüência é 9:8. O intervalo seguinte, de ré a mi é novamente um tom inteiro, mas sua taxa de freqüência *é* 10:9. Os intervalos remanescentes na escala são mi para fá (16:15), fá para sol (9:8), sol para lá (10:9), lá para si (9:8), e finalmente si para dó-maior (16:15) — a última nota estando uma oitava acima de dó. Esta é a escala conhecida como dó-maior. Mas as mesmas proporções devem se manter, independente de com qual nota começamos. *Cada* escala maior consiste na mesma seqüência de intervalos.

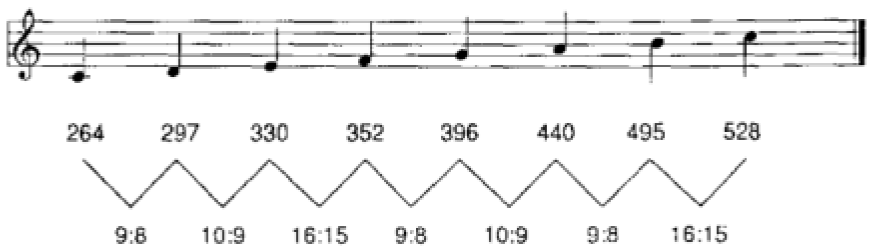


Figura 52. A escala em dó-maior. Os números em cima indicam a freqüência de cada nota em ciclos por segundo, os números em baixo são a proporção entre as freqüências de notas sucessivas.

BERNOULLI: Eu posso ver a confusão causada pela existência de duas proporções diferentes para o mesmo intervalo. Mas porque isso o incomoda? Afinal a música está conosco há tantos séculos e ninguém mais se incomodou.

BACH: Na verdade é pior do que isso. Não somente existem dois tipos diferentes de tons inteiros em uso, mas se somarmos dois semitons, a soma não será exatamente igual a nenhum dos dois tons. Experimente calcular. É como se 1/2+1/2 não fosse exatamente igual a 1, apenas aproximadamente.

BERNOULLI (*escrevendo alguns números em seu bloco de notas):* Você está certo. Para somar dois intervalos nós devemos multiplicar suas taxas de freqüência. Somar dois semitons corresponde ao produto de (16:15). (16:15) =256:225 ou, aproximadamente 1,138, que é ligeiramente maior do que 9:8 (=1,125) ou 10:9 (=1,111).

BACH: Está vendo o que acontece? O cravo tem um mecanismo delicado, que permite que cada corda vibre apenas na freqüência fundamental específica. Isto significa que, se eu quero tocar uma peça em ré-maior, no lugar de dó-maior — o que se conhece como transposição — então, o primeiro intervalo (de ré para mi) terá uma proporção de 10:9, em vez. do 9:8 original. Isso continua bem porque a proporção 10:9 ainda faz parte da escala; e ademais, o ouvinte médio quase não nota a diferença. Mas o intervalo seguinte — que novamente deve ser um tom inteiro — pode ser formado apenas se subirmos um semitom de mi para fá e então outro semitom de fá para fá sustenido. Isso corresponde a uma proporção de (16:15). (16:15) =256:225, um intervalo que não existe na escala. E o problema só se complica quanto mais eu subo na nova escala. Resumindo, com o sistema atual de afinação eu não posso transpor de uma escala para a outra, a menos, é claro, que eu toque um dos poucos instrumentos que possuem um espectro contínuo de notas, como o violino ou a voz humana.

BACH: (*não esperando que Bernoulli responda)*: Mas eu encontrei um remédio: eu faço todos os tons inteiros serem iguais uns aos outros. Significa que a soma de quaisquer dois semitons sempre dará um tom inteiro. Mas para fazer isso tive que abandonar a escala de modulação exata em favor de um compromisso. No novo arranjo a oitava consiste em doze *semitons iguais*. Eu a chamo de *escala igualmente temperada.*[2] Mas o problema é que é difícil convencer meus colegas músicos de suas vantagens. Eles se agarram teimosamente a escala antiga.

BERNOULLI: Talvez eu possa ajudá-lo. Em primeiro lugar, preciso saber a proporção entre as freqüências de cada semitom em sua nova escala.

BACH: Bem, o senhor é o matemático, estou certo de que pode calcular.

BERNOULLI: Acabei de fazê-lo. Se existem doze semitons iguais na oitava, então cada semitom deve ter uma taxa de freqüência de $\sqrt[12]{2}$:1, De fato, a soma de doze desses semitons corresponderá a $(\sqrt[12]{2})^{12}$, que *é* exatamente 2:1, a oitava.[3]

BACH: Agora você me deixou completamente perdido. Meu conhecimento de matemática vai pouco além da aritmética elementar. Existe algum meio de mostrar isso visualmente?

BERNOULLI: Acho que sim. Meu falecido irmão Jakob passou muito tempo explorando uma curva chamada de espiral logarítmica. Nessa curva, rotações iguais aumentam a distância em relação ao pólo em proporções iguais. Não é isso exatamente o que acontece com a escala que acabou de descrever?

BACH: Pode me mostrar essa curva?

BERNOULLI: Claro [fig. 53]. Enquanto você falava, eu marquei sobre ela os doze semitons iguais. Para transpor uma peça de uma escala para outra, tudo o que se terá de fazer será girar a espiral de modo que o primeiro tom de sua escala caia sobre o eixo dos *x*. Os tons remanescentes cairão automaticamente no lugar. Na verdade é uma espécie de calcuiador musical!

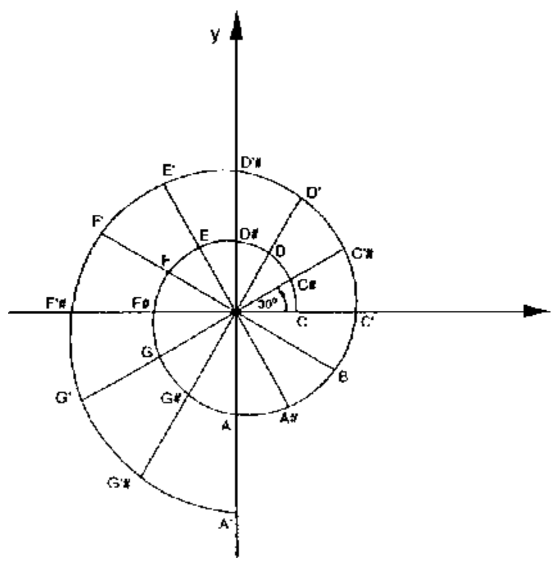


Figura 53. As doze notas da escala igualmente temperada, arrumadas ao longo de uma espiral logarítmica.*

*Na nocação musical germânica: C=dó, D=ré; E=mi; F=fá, G=sol; A=lá; B=si. *(N. do E.)*

BACH: Isso soa empolgante. Talvez a sua espiral possa me ajudar a ensinar o assunto para os jovens músicos, pois estou convencido de que a nova escala tem um grande potencial para os futuros instrumentistas. De fato estou agora trabalhando em uma série de prelúdios que chamo de "Cravo Bem Temperado". Cada prelúdio é escrito para uma das doze teclas maiores e menores. Escrevi uma série semelhante em 1722, como um livro de instrução para a minha primeira esposa, Maria Barbara — que descanse em paz —, e meu primeiro filho, Wilhelm Friedemann. Desde então, como sabe, fui abençoado com outros filhos, e todos mostram sinais de um grande talento musical. É para eles, assim como para minha segunda esposa, Anna Magdalena, que estou escrevendo esse novo trabalho.

BERNOULLI: Eu admiro o relacionamento maravilhoso que tem com os seus filhos. Não posso dizer o mesmo quanto à minha família. Por algum motivo sempre fomos um grupo brigão. Já mencionei meu filho Daniel, com quem trabalhei em vários problemas. Mas há seis anos eu tive que partilhar com ele o prêmio bianual da Academia de Ciências de Paris. Senti que merecia receber o prêmio sozinho. Além disso, Daniel sempre esteve do lado de Newton em sua amarga controvérsia com Leibniz, enquanto eu apóio Leibniz incondicionalmente, pois o considero o verdadeiro inventor do cálculo. Sob essas circunstâncias achei impossível continuar o meu trabalho com ele e o expulsei de minha casa.

BACH *(quase incapaz de esconder seu espanto)*: Bem, eu desejo o melhor para o senhor e sua família e que Deus o abençoe com muitos anos de vida produtiva.

BERNOULLI: Desejo-lhe o mesmo. E se. Deus quiser, espero encontrá-lo de novo para continuar nosso diálogo, agora que descobrimos que a matemática e a música possuem tanto em comum.

Os dois apertam as mãos e partem em suas longas jornadas de volta ao lar.

NOTAS

1. As cordas vibratórias foram o mais notável problema matemático do século XVIII. A maioria dos principais matemáticos do período contribuiu para a sua solução, entre eles os Bernoullis, Euler, D'Alembert e Lagrange. O problema foi finalmente resolvido em 1822 por Joseph Fourier.
2. Bach não foi o primeiro a pensar em tal disposição de notas. Tentativas para se chegar a um sistema "correto" de afinação remontam ao século XVI, e, em 1691, uma escala "bem temperada" foi sugerida pelo construtor de órgãos Andreas Werckmeister. Mas foi devido a Bach que a escala igualmente temperada tornou-se conhecida universalmente. Ver o *The New Grove Dictionary of Music and Musicians,* vol. 18 (Londres: Macmillan, 1980), pp. 664-666 e 669-670.
3. O valor decimal dessa proporção é cerca de 1,059, comparado a 1,067 para a proporção 16:15. Essa escassa diferença, embora ainda dentro do alcance da audição, é tão pequena que a maioria dos ouvintes a ignora. Ao tocar solo,

entretanto, os cantores e os instrumentistas de cordas ainda preferem a escala exata de entonação.

A espiral logarítmica na arte e na natureza

Provavelmente nenhuma outra curva exerce fascínio maior para cientistas, artistas e naturalistas do que a espiral logarítmica. Chamada *sp ira mirabilis* por Jakob Bernoulli, a espiral possui propriedades matemáticas notáveis, que a tornam única entre as curvas planas (ver a pág. 159). Sua forma graciosa tem sido um modelo decorativo favorito desde a antigüidade; e, com a possível exceção do círculo (que é, em si, um caso especial da espiral logarítmica), ela ocorre com mais freqüência na natureza do que qualquer outra curva, às vezes com uma precisão espantosa, como *é* o caso da concha do náutilo (fig, 54).

Talvez o fato mais notável sobre a espiral logarítmica é que ela parece a mesma em todas as direções. Mais precisamente, cada linha reta através do centro (o pólo) atravessa a espiral exatamente com o mesmo ângulo (ver fig. 45 no Capítulo 11). Por isso ela também é conhecida como espiral *eqüiangular*. Esta propriedade dá à espiral a simetria perfeita do círculo — de fato, o círculo é uma espiral logarítmica para a qual o ângulo de interseção é 90° e a taxa de crescimento é 0.

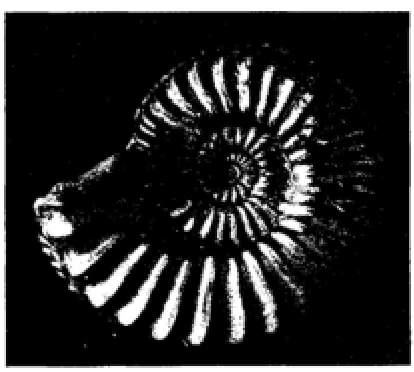


Figura 54. A concha do náutilo.

Uma segunda característica, relacionada com a primeira, é esta: girando a espiral por arcos iguais aumenta a distância ao pólo através de uma *taxa* igual, isto é, numa progressão geométrica. Daí que, qualquer par de linhas traçadas através do pólo, com um ângulo fixo entre elas, corta seções semelhantes (embora não congruentes) da espiral. Isto é visto claramente na concha do náutilo, cujas câmaras são réplicas precisas umas das outras, aumentando geometricamente em tamanho. Em seu trabalho clássico *On Growtb and Form,* o naturalista inglês D'Arcy W Thompson (1860-1948) discute em grande detalhe o papel da espiral logarítmica como o padrão de crescimento preferido de numerosas formas naturais, entre elas as conchas, chifres, presas e girassóis (fig. 55).[1]

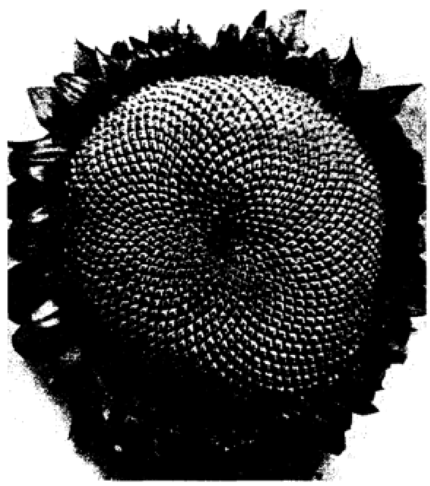


Figura 55. Girassol.

A essas podemos acrescentar as galáxias espirais, aqueles "universos-ilhas" cuja natureza precisa não era ainda conhecida quando Thompson publicou seu livro em 1917 (fig. 56).

Figura 56. A galáxia espiral M100. Cortesia de Zsolt Frei.

Os primeiros anos do século XX presenciaram uma retomada do interesse pela arte grega e sua relação com a matemática. Houve um grande número de teorias sobre a estética e alguns estudiosos tentaram dar uma formulação matemática ao conceito de beleza. Isso levou à redescoberta da espiral logarítmica. Em 1914, Sir Theodore Andrea Cook publicou *The Curves ofLife,* um volume de quase quinhentas páginas dedicado inteiramente à espiral e seu papel na arte e na natureza. *Dynamic Symmetry* (1926), de Jay Hambidge, influenciou gerações de artistas que buscavam a beleza e a harmonia perfeitas.

Figura 57. A regra de ouro: *C*divide o segmento *AB* de modo que o segmento inteiro está para a parte maior assim como a parte maior está para a menor. Se o segmento inteiro medir uma unidade de comprimento, teremos $1/x = x/(1 - x)$. Isto nas leva à equação quadrática $x^2 + x - 1 = 0$, cuja solução positiva *é* $x = (-1+\sqrt{5})2$, ou cerca de 0,61803. A regra de ouro é a recíproca deste número, ou cerca de 1,61803.

Hambidge usou como seu princípio orientador a *regra de ouro,* a proporção pela qual um segmento de linha deve ser dividido, de modo que todo o seu comprimento esteja para a parte mais longa, assim como a parte mais longa está para a mais curta (fig. 57). Esta proporção, indicada pela letra ϕ (fi) tem o valor de $(1+\sqrt{5})/2 = 1{,}618$. … Muitos artistas acreditam que, de todos os retângulos, aquele com uma proporção comprimento-largura igual a ϕ – o retângulo de ouro" – tem as dimensões "mais agradáveis"; daí o papel de destaque que essa proporção tem desempenhado na arquitetura. A partir de qualquer retângulo de ouro podemos obter um novo retângulo de ouro cujo comprimento é a largura do retângulo original. Esse processo pode ser repetido interminavelmente, resultando em uma seqüência infinita de retângulos dourados cujo tamanho diminui até zero (fig. 58). Os retângulos circunscrevem uma espiral logarítmica, a "espiral de ouro" que Hambidge usou como seu motivo. Um autor influenciado pelas idéias de Hambidge foi Edward B. Edwards, cujo livro *Pattem and Design with Dynamic Symmetry* (1932) apresenta centenas de desenhos decorativos baseados no motivo da espiral (fig. 59).

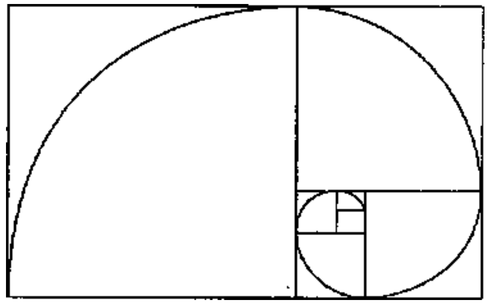


Figura 58. “Retângulos dourados” inscritos em uma espiral logarítmica. Cada retângulo tem uma razão comprimento-largura de 1,61803….

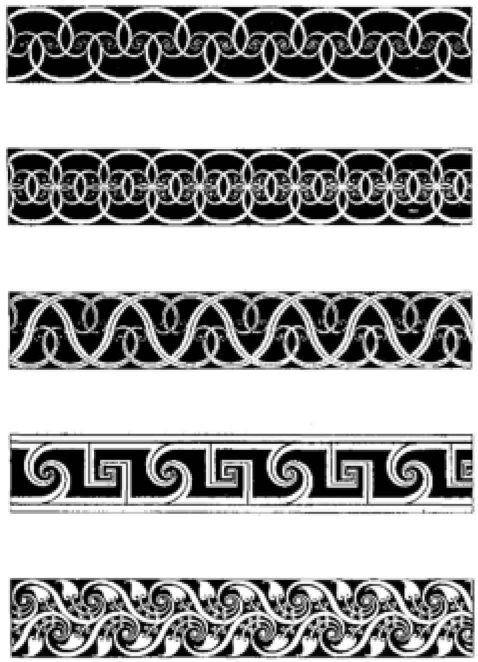


Figura 59-Padrões decorativos baseados na espiral logarítmica. Reprodução autorizada de *Pattern and Design with Dynamic Symmetry,* de Edward B. Edwards (1932; Nova York: Dover, 1967).

O artista holandês Maurits C. Escher (1898-1972) usou a espiral em alguns de seus trabalhos mais criativos. Em *Path of Life* (Padrões da vida, 1958, fig. 60), podemos ver uma grade de espirais logarítmicas ao longo da qual peixes nadam em um ciclo interminável. Emergindo de um centro infinitamente remoto eles são brancos, mas, conforme se aproximam da periferia, sua cor muda para cinza, e daí eles se movem de volta para o centro onde desaparecem — o eterno ciclo da vida e da morte. A paixão de Escher por encher um plano com figuras de forma idêntica cujos tamanhos aumentam geometricamente encontra aqui uma expressão sublime.[2]

Imagine quatro insetos posicionados nos cantos de um retângulo. A um sinal sonoro, cada inseto começa a se mover em direção ao seu vizinho. Que curso eles seguirão e onde irão se encontrar? Os caminhos se revelam como espirais logarítmicas que convergem para o centro. A figura 61 mostra um dos muitos desenhos inspirados no Problema dos Quatro Insetos.

Figura 60. *Path ofLife* 7/(1958), de M.C. Escher.

E aqui fica um pensamento para aqueles que gostam de sonhar com "o que aconteceria se…". Se a lei da gravitação universal fosse uma lei do inverso do *cubo* em vez do inverso do quadrado, uma órbita possível para os planetas em torno do sol seria a espiral logarítmica (a espiral hiperbólica $r = k/\Theta$ seria outra órbita possível). Isso foi provado por Isaac Newton, no Livro I dos seus *Principia.*

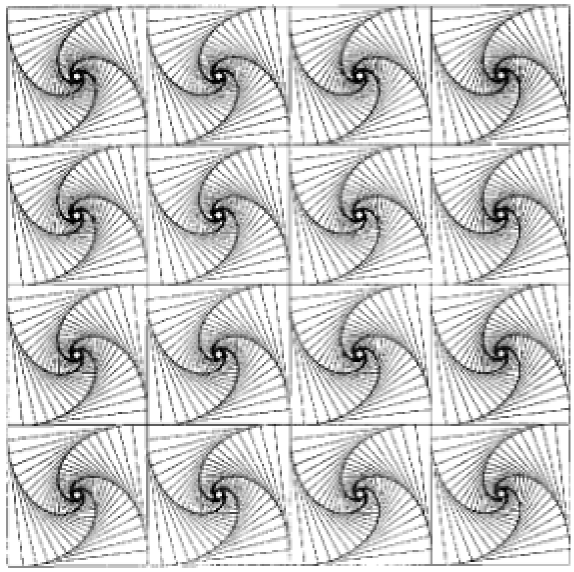


Figura 61. Desenho decorativo baseado no Problema dos Quatro Insetos.

NOTAS E FONTES

1. Todos os trabalhos citados neste capítulo encontram-se na bibliografia.
2. Para uma discussão detalhada sobre a espiral logarítmica no trabalho de Escher, vero meu livro *To Inftnity and Beyond: A Cultural History ofthe Infmite (\9&7*; reimpressão Princeton, Princeton Universicy Press, 1991).

12

$(e^x+e^{-x})/2$: A corrente suspensa

Portanto eu ataquei [o problema da catenária],
que ainda não tinha tentado, e com minha chave
[o cálculo diferencial] alegremente abri seu segredo.

– GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ,
no *Acta eruditorum*
(Julho de 1690)

Ainda não terminamos com os Bernoullis. Entre os notáveis problemas que ocuparam a comunidade matemática, nas décadas que se seguiram à invenção do cálculo, estava o problema da *catenária* — a corrente suspensa (do latim *catena,* uma corrente). Este problema, como o da braquistócrona, foi proposto inicialmente por um dos irmãos Bernoullis, dessa vez Jakob. No número de maio de 1690 do *Acta eruditorum,* o jornal que Leibniz tinha fundado oito anos antes, Jakob escreveu: "E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos." [1] Jakob presumiu que o fio é flexível em todas as suas partes e que tem uma espessura constante (e portanto uma densidade linear uniforme).

A história desse famoso problema é bem semelhante à da braquistócrona e quase os mesmos personagens tomaram parte nela. Galileu já tinha demonstrado interesse e imaginara que a curva era uma parábola. Aos olhos, a corrente suspensa certamente se parece com uma parábola (fig. 62). Mas Christian Huygens, o prolífico cientista holandês, cujo papel na história tem sido um tanto subestimado (sem dúvida porque viveu entre as eras de Kepler e Galileu antes dele, e Newton e Leibniz depois), provou que a catenária não podia ser uma parábola.

Figura 62. A catenária: a curva de uma corrente suspensa.

Isso aconteceu em 1646, quando Huygens tinha apenas dezessete anos. Mas encontrar a curva certa era outra história e, naquela época, ninguém tinha idéia de como lidar com o problema. Era um dos grandes mistérios da natureza e só o cálculo poderia resolvê-lo.

Em junho de 1691, um ano depois de Jakob Bernoulli ter proposto o seu problema, o *Acta* publicou as três soluções corretas que foram apresentadas — por Huygens (então com sessenta e dois anos de idade), Leibniz e Johann Bernoulli. Cada um abordara o problema de uma maneira diferente, mas todos tinham chegado à mesma solução. O próprio Jakob foi incapaz de resolvê-lo, o que deixou seu irmão Johann radiante. Vinte e sete anos depois, muito tempo após a morte de Jakob, Johann escreveu para um colega que, aparentemente, questionara a sua afirmação de que fora ele, e não Jakob, quem encontrara a solução:

> O senhor diz que meu irmão propôs esse problema; *è* verdade, mas será que isso significa que ele tinha a solução naquela oportunidade? Não. Quando ele propôs o problema, por minha sugestão (pois fui o primeiro a pensar nele), nenhum de nós dois era capaz de resolvê-lo; e, desesperados, achamos que era insolúvel. Até que o senhor Leibniz anunciou ao público, no jornal de Leipzig, de 1690, p. 360, que tinha resolvido o problema, mas não publicaria a solução, para dar tempo aos outros analistas. Foi isso que nos encorajou, a mim e a meu irmão, a atacarmos novamente o problema.
>
> Os esforços de meu irmão foram inúteis. Quanto a mim, fui mais feliz, pois encontrara a habilidade (e digo isto sem me

> gabar, por que deveria esconder a verdade?) para resolvê-lo inteiramente…. Na manhã seguinte, cheio de alegria, fui encontrar meu irmão, que ainda lutava miseravelmente com esse nó górdio, sem chegar a parte alguma, sempre achando, como Galileu, que a catenária era uma parábola. Pare! Pare!, eu disse a ele, não se torture mais tentando provar a identidade da catenária com a parábola, porque ela é inteiramente falsa.[2]

Johann acrescentou que, das duas curvas, a parábola é algébrica enquanto a catenária é transcendental. Impetuoso como sempre, concluiu: "O senhor conhece a disposição do meu irmão. Ele não hesitaria, se pudesse fazê-lo honestamente, em tirar-me a honra de ser o primeiro a resolvê-lo, em vez de me deixar tomar parte — e muito menos me cederia o lugar, se já fosse seu." A notoriedade dos Bernoullis de brigarem entre si — e com os outros — não diminuíra nada com a passagem do tempo.[3]

A catenária revelou-se a curva cuja equação, na notação moderna, *é* $y = (e^{ax}+e^{-ax})/2a$, onde a é uma constante cujo valor depende dos parâmetros físicos da corrente — sua densidade linear (massa por unidade de comprimento) e a tensão com a qual ela é segura. A descoberta desta equação foi anunciada como um grande triunfo do novo cálculo diferencial, e os participantes aproveitaram o mais que podiam esta realização para aumentar suas reputações. Para Johann, foi "o passaporte para ingressar na sociedade erudita de Paris".[4] Leibniz fez questão de que todos soubessem que fora o *seu* cálculo (sua "chave") que resolvera o mistério. Se esse tipo de ostentação parece excessivo hoje em dia, devemos nos lembrar de que, nos anos finais do século XVII, problemas como o da braquistócrona e da catenária representavam o maior desafio aos matemáticos e suas soluções eram justamente consideradas com grande orgulho. Atualmente, esses problemas são exercícios de rotina nos cursos de cálculo avançado.[5]

Devemos mencionar que a equação da catenária não foi apresentada originalmente na forma acima. O número *e* ainda não tinha um símbolo especial, e a função exponencial não era considerada função independente e sim um inverso da função logarítmica. A equação da catenária era simplesmente subentendida a partir do modo como a curva era construída, como o desenho de Leibniz (fig. 63) mostra claramente. Leibniz até mesmo sugeriu que a catenária poderia ser usada como um engenho para o cálculo dos logaritmos, uma espécie de tabela de logaritmos "analógica". "Isso poderá ajudar", ele disse, "pois em viagens longas podemos perder nossas tabelas de logaritmos."[6] Estaria ele sugerindo que se carregasse uma correntinha no bolso, como sobressalente de uma tabela de logaritmos?

Em nosso século a catenária foi imortalizada em um dos monumentos arquitetônicos mais imponentes do mundo, o Gateway Arch. (Arco do Portal) em St. Louis, Missouri (fig. 64). Projetado pelo arquiteto Eero Saarinen e terminado em 1965, tem a forma exata de uma catenária invertida, seu topo erguendo-se 630 pés (192 metros) acima das margens do rio Mississípi.

ooo

Para a =1, a equação da catenária é

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{1}$$

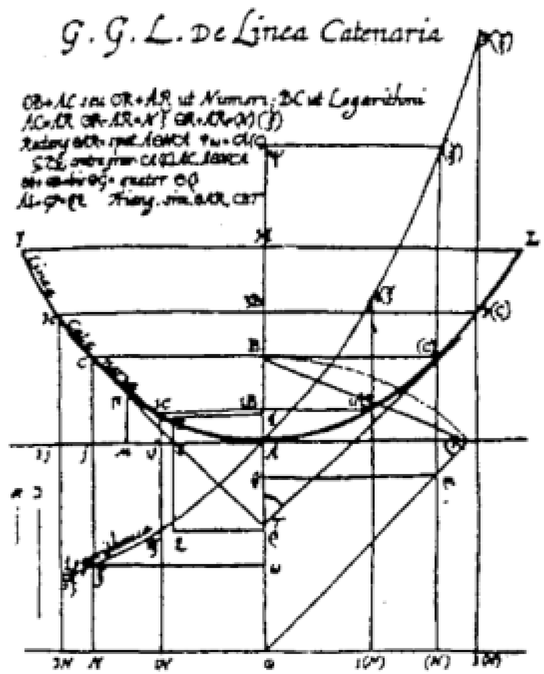


Figura 63. A construção da catenária por Leibniz (1690).

Figura 64. O Arco do Portal em St. Louis, Missouri. Cortesia do Jefferson National Expansion Memorial/National Park Service.

Seu gráfico pode ser construído plotando-se os gráficos de e^x e e^{-x} no mesmo sistema de coordenadas, acrescentando-se suas ordenadas (alturas) para cada ponto x e dividindo-se o resultado por 2. O gráfico, que, da maneira como foi construído, *é* simétrico sobre o eixo dos y, é mostrado na figura 65.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad (2)$$

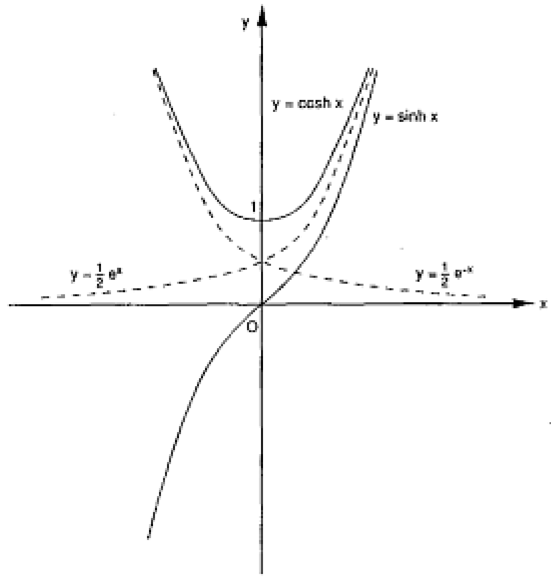


Figura 65. Os gráficos de senh *x e* cosh *x.*

Em adição à equação 1 podemos considerar uma segunda equação, cujo gráfico também é visto na figura 65. Acontece que as equações 1 e *2,* quando consideradas como funções de *x,* exibem algumas semelhanças extraordinárias para com as funções circulares cos *x* e sen *x* estudadas em trigonometria. Essas semelhanças foram primeiro notadas pelo jesuíta italiano Vincenzo Riccati (1707-1775). Em 1757 ele introduziu a notação Ch *x* e Sh *x* para essas funções:

$$\mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{3}$$

Riccati demonstrou que elas satisfazem a identidade (ChꝎ)^2 – (Sh (Ꝏ)^2 =1 (onde usamos a letra Ꝏ para simbolizar a variável independente), a qual, exceto pelo sinal de menos no segundo termo, é análoga a identidade trigonométrica (cos (Ꝏ)^2+(sen Ꝏ)^2 =1. Isso mostra que ChꝎ e ShꝎ estão relacionados com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, do mesmo modo como cosꝎ e senꝎ se relacionam com o círculo unitário $x^2+y^2 = 1$.[7] A notação de Riccati sobreviveu quase inalterada; hoje chamamos essas funções de cosh Ꝏ e senh Ꝏ, significando "cosseno hiperbólico de Ꝏ" e "seno hiperbólico de Ꝏ".

Riccati pertencia a outra notável família de matemáticos, embora não tão prolífica quanto a dos Bernoullis. O pai de Vincenzo, Jacopo (ou

Giacomo) Riccati (1676-1754) estudara na universidade de Pádua e fez muito para disseminar o trabalho de Newton na Itália. (A equação diferencial $dy/dx = py^2+qy+r$, onde p,q, e r são funções dadas de x, recebeu um nome em homenagem a Jacopo Riccati.) Dois outros filhos de Jacopo, Giordano (1709-1790) e Francesco (1718-1791), também se tornaram matemáticos bem-sucedidos, o último aplicando princípios geométricos à arquitetura. Vincenzo Riccati era intrigado pela semelhança entre as equações $x^2 - y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 1$ da hipérbole e do círculo unitário. Ele desenvolveu sua teoria das funções hiperbólicas inteiramente a partir de geometria da hipérbole. Hoje preferimos uma abordagem analítica que usa as propriedades especiais das funções $C\ e^x$ e e^{-x}. Por exemplo, a identidade $(\cosh \theta)^2 - (\text{senh } \theta)^2 = 1$ pode ser demonstrada facilmente elevando-se ao quadrado ambos os lados da equação 3, subtraindo o resultado e usando as identidades $e^x . e^y = e^{x+y}$ e $e^0 = 1$.

O que se revela é que a maioria das fórmulas usadas na trigonometria comum possuem equivalentes hiperbólicos. Ou seja, se pegarmos uma típica identidade trigonométrica e substituirmos sen θ e cos θ por senh θ e cosh θ, a identidade continuará correta, com a possível mudança de sinal em um dos termos. Por exemplo, as funções circulares obedecem as fórmulas de diferenciação (note a ausência do sinal de menos na primeira das equações de 5).

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \tag{4}$$

E as fórmulas correspondentes para as funções hiperbólicas são

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \tag{5}$$

Essas semelhanças tornam as funções hiperbólicas úteis na avaliação de certas integrais indefinidas (an ti derivadas), por exemplo, integrais da forma $(a^2+x^2)^{1/2}$. (A lista de algumas analogias adicionais entre as funções circulares e hiperbólicas pode ser encontrada nas páginas 193-194).

Poderíamos desejar que *todas* as relações entre as funções circulares tivessem um equivalente hiperbólico. Isto colocaria as funções circulares e hiperbólicas em uma base completamente igual, e, por implicação, daria à hipérbole um status igual ao do círculo. Infelizmente, este não é o caso. Diferente da hipérbole, o círculo é uma curva fechada; à medida que seguimos ao seu redor, as coisas devem retornar ao estado original. Em conseqüência, as funções circulares são *periódicas*— seus valores se repetem a cada 2π radianos. Esta é uma característica que torna as funções circulares importantes para o estudo dos fenômenos periódicos — da análise dos sons musicais à propagação das ondas eletromagnéticas. As funções hiperbólicas não possuem esta característica e seu papel na matemática é menos fundamental.[8]

E no entanto, na matemática, relações puramente formais amiúde possuem um grande poder de sugestão e têm motivado o desenvolvimento de novos conceitos. Nos próximos dois capítulos veremos como Leonhard Euler, ao permitir que a variável x nas funções exponenciais assumisse valores imaginários, deu novas bases às relações entre as funções circulares e hiperbólicas.

NOTAS E FONTES

1. Citado em *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788',* de C. Truesdell (Suíça: Orell Füssli Turici, 1960), p. 64. Este trabalho também contém as três derivações da catenária dadas por Huygens, Leibniz e Johann Bernoulti.
2. Idem, pp. 75-76.
3. Para ser justos, devemos mencionar que Jakob estendeu o método de Johann paraasolu-ção no caso de correntes com espessura variável. Ele também provou que, de todas as formas possíveis que a corrente pendente poderia assumir, a catenária é aquela com o mais baixo centro de gravidade, uma indicação de que a natureza busca minimizar a energia potencial de todas as formas que cria.
4. Ludwig Otto Spiess, citado em *RationalMechanics,* de Truesdell, p. 66.

5. Quanto à solução do problema da catenária, ver, por exemplo, *Calculus with Analytic Geometry,* de George F. Simmons. (Nova York: McGraw-Hill, 1985), pp. 716-717.
6. Citado no *RationalMechanics,* deTruesdell, p. 69.
7. Note-se, entretanto, que para as funções hiperbólicas, a variável (0 não desempenha mais o papel de um ângulo, como no caso das funções circulares. Para uma interpretação geométrica de tp neste caso, ver o Apêndice 7.
8. No Capítulo 14, contudo, veremos que as funções hiperbólicas possuem um período *imaginário 2 πi,* onde $i = \sqrt{-1}$.

Analogias notáveis

Considere o círculo unitário — o círculo com centro na origem e raio igual a 1 — cuja equação, em coordenadas retangulares é $x^2+y^2=1$ (fig. 66). Façamos de *P(x, y)* um ponto deste círculo e deixemos que o ângulo entre o eixo dos *x* positivos e a linha *OP* seja ϕ (medido em radianos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), As *funções circulares ou trigonométricos* "seno" e "cosseno" são definidas como as coordenadas x e *y* de *P*:

$x=\cos\phi$, $y=\operatorname{sen}\phi$.

O ângulo ϕ também pode ser interpretado como duas vezes a área do setor circular *OPR* na figura 66, já que esta área é dada pela fórmula $A=r^2\phi/2=\phi/2$, onde $r=1$ é o raio.

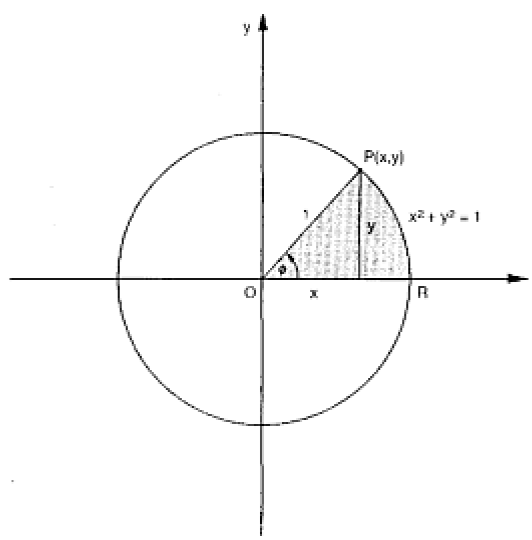


Figura 66. O círculo unitário $x^2+y^2=1$.

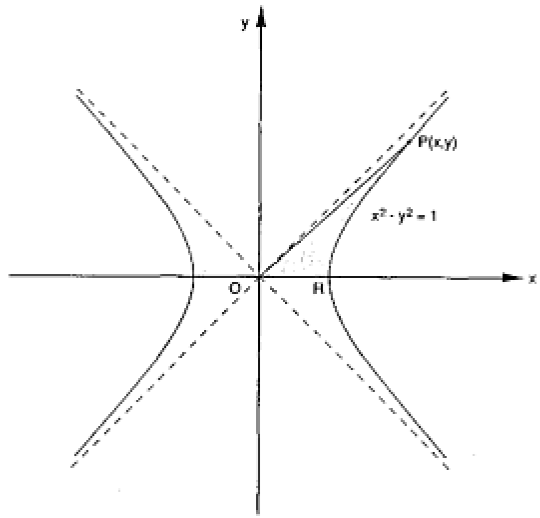


Figura 67. A hipérbole retangular $x^2 - y^2 = 1$.

As funções hiperbólicas são definidas de modo semelhante em relação a hipérbole retangular $x^2 - y^2 = 1$ (fig. 67), cujo gráfico pode ser obtido da hipérbole $2xy = 1$ girando-se os eixos coordenados através de um ângulo de 45° no sentido contrário aos ponteiros do relógio. Ela tem o par de linhas $y = \pm x$ como assíntotas. Façamos de P (x,y) um ponto desta hipérbole. Então definimos:

$x = \cosh \theta$ e $y = \operatorname{senh} \theta$

onde $\cosh \theta = (e^{\theta} + e^{-\theta})/2$ e $\operatorname{senh} \theta = (e^{\theta} - e^{-\theta})/2$ ver pág. 188). Aqui θ não é um ângulo entre o eixo dos x e a linha OP, mas meramente um parâmetro (variável).

A seguir, listadas lado a lado, estão várias propriedades análogas das funções circulares e hiperbólicas (usamos o x para simbolizar a variável independente):

Relações pitagóricas

$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \qquad \cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$

Aqui $\cos^2 x$ é uma forma resumida para $(\cos x)^2$, e, de modo semelhante, para as outras funções.

Simetrias (relações par-ímpar)

$\cos(-x) = \cos x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$

$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x \qquad \text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$

Valores para $x = 0$

$\cos 0 = 1 \qquad \cosh 0 = 1$

$\text{sen}\, 0 = 0 \qquad \text{senh}\, 0 = 0$

Valores para $x = \pi/2$

$\cos \pi/2 = 0 \qquad \cosh \pi/2 \approx 2{,}509$

$\text{sen}\, \pi/2 = 1 \qquad \text{senh}\, \pi/2 \approx 2{,}301$

(Esses valores não possuem nenhum significado especial)

Fórmulas de adição

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y \qquad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$

$\text{sen}(x + y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x\, \text{sen}\, y \qquad \text{senh}(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$

Fórmulas de diferenciação

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\text{senh}\, x) = \cosh x$$

Fórmulas de integração

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1} x + c$$

Aqui $\operatorname{sen}^{-1} x$ e $\operatorname{senh}^{-1} x$ são as funções inversas de sen x e senh x, respectivamente.

Periodicidade

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$	não possui período real
$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$	

Analogias adicionais existem entre as funções tan x (definida como sen x/cos x e tanh x (=senh x/cosh x) e entre as três funções trigonométricas restantes sec x (=l/cos x), csc x (=l/sen x) e cot x (=1/tan x) e seus equivalentes hiperbólicos.

É a periodicidade que faz as funções trigonométricas serem tão importantes na matemática e na ciência. As funções hiperbólicas não possuem essa propriedade e conseqüentemente desempenham um papel menos importante; mas elas ainda são úteis na descrição de várias relações entre funções, particularmente em certas classes de integrais indefinidas (antiderivadas).

É interessante que, embora o parâmetro ω nas funções hiperbólicas não seja um ângulo, ele pode ser interpretado como duas vezes a área do setor hiperbólico *OPR* na figura 67, em completa analogia com a interpretação de ω como duas vezes a área do setor circular *OPR* na figura 66. Uma prova deste fato — percebido em primeiro lugar por Vincenzo Riccati por volta de 1750 — *é* dada no Apêndice 7.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Esta série infinita foi descoberta por Newton em 1665, e pode ser obtida da expansão binomial de $(1+1/n)^n$, deixando $n \to \infty$. Ela converge muito rapidamente, devido ao aumento rápido dos valores dos fatoriais nos denominadores. Por exemplo, a soma dos primeiros onze termos (terminando com 1/10!) é 2,718281801; o valor real, aproximado para nove casas decimais é 2,718281828.

$$e^{xi}+1=0$$

Está é a fórmula de Euler, uma das mais famosas de toda a matemática. Ela liga as cinco constantes fundamentais da matemática, 0, 1, *e,* π e *i* =√-1.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\dots}}}}}$$

Esta *fração contínua* infinita, e muitas outras envolvendo *e* e π, foi descoberta por Euler em 1737. Ele provou que todo número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita e, inversamente (o inverso é óbvio). Daí que uma fração contínua infinita (isto é, que não termina) sempre representa um número irracional. Outra fração contínua infinita de Euler envolvendo *e* é:

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\dots}}}$$

$$2 = \frac{e^1}{e^{1/2}} \cdot \frac{e^{1/3}}{e^{1/4}} \cdot \frac{e^{1/5}}{e^{1/6}} \cdot \dots$$

Este *produto infinito* pode ser obtido da série ln 2 =1 – 1/2+1/3 – 1/4+– Ela é reminiscente do produto de Wallis, π/2=(2/1). (2/3). (4/3). (4/5). (6/5). (6/7). …, exceto que *e* aparece *dentro* do produto.

ooo

A matemática aplicada está cheia de fórmulas envolvendo o *e*. Aqui vão alguns exemplos:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Esta integral definida aparece na teoria da probabilidade. A integral *indefinida* (antiderivada) de $e^{-x2/2}$ não pode ser expressa em termos de funções elementates (polinômios e proporções entre polinômios, funções trigonométricas e exponenciais e seus inversos); isto é, não existe nenhuma combinação finita de funções elementares cuja derivada seja $e^{-x2/2}$.

Outra expressão cuja antiderivada não pode ser expressa em termos das funções elementares é a aparentemente simples e^{-x}/x. De fato, sua integral, computada a partir de algum x dado até o infinito *define* uma nova função, conhecida como *integral exponencial* e denotada por $Ei(x)$:

$$Ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

(a variável de integração é chamada t, de modo a não ser confundida com o limite inferior de integração x). Esta função, que é chamada especial, embora não se possa expressar na forma fechada de termos de funções elementares, deve, entretanto, ser considerada como conhecida, no sentido de que o valor de qualquer x positivo, pode ser calculado e tabulado (isso acontece porque podemos exprimir o valor integrado e^{-x}/x *como* uma série de potências e então integrá-lo termo a termo).

A integral definida $_0\int^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ para uma dada função $f(t)$ tem um valor que ainda depende do parâmetro j; daí que esta integral define uma função $F(s)$ de s, conhecida como *transformada de Laplace de $f(t)$,* sendo escrita como $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Como a transformada de Laplace desfruta de muitas características convenientes — todas elas devidas às propriedades de e^{-st} — ela é muito usada em aplicações, principalmente para resolver equações diferenciais lineares (veja qualquer texto sobre equações diferenciais ordinárias).

13

e^{ix}: "A mais famosa de todas as fórmulas"

Existe uma fórmula famosa — talvez a mais compacta e famosa entre todas as fórmulas — desenvolvida por Euler a partir de uma descoberta de De Moivre: $e^{i\pi}+1=0$*. ... Ela fascina igualmente o místico, o cientista, o filósofo e o* matemático.

– EDWARD KASNER E JAMES NEWMAN, *Mathematics and the Imagination* (1940)

Se comparamos os Bernoullis com a família Bach, então Leonhard Euler (1707-1783), é, inquestionavelmente, o Mozart da matemática, um homem cuja produção intelectual imensa — ainda não publicada inteiramente —, estima-se, encheria, no mínimo, setenta volumes. Euler quase não deixou nenhuma área da matemática intocada, colocando sua marca em campos tão diversos quanto análise, teoria dos números, mecânica, hidrodinâmica, cartografia, topologia e teoria do movimento lunar. Com a possível exceção de Newton, o nome de Euler aparece com mais freqüência do que qualquer outro ao longo da matemática clássica. Além disso, devemos a Euler muitos dos símbolos matemáticos que usamos hoje em dia, entre eles i, π, e $ef(x)$. E como se isto não fosse o bastante, ele foi um grande divulgador da ciência deixando volumes de correspondência sobre cada aspecto da ciência, da filosofia, da religião e da política.

Leonhard Euler nasceu na Basiléia em 1707, filho de um clérigo que desejava a mesma carreira para seu filho. Mas Paul Euler era também versado em matemática, assunto que estudara sob a tutela de Jakob Bernoulli e mudou de idéia ao reconhecer os talentos matemáticos do filho. Os

Bernoullis também tiveram certa influência nesta decisão. O irmão de Jakob, Johann, ensinou matemática particularmente ao jovem Euler e convenceu Paul a deixar o filho seguir a própria vocação. Em 1720 Leonhard ingressou na Universidade da Basiléia, onde se graduou em apenas dois anos. Daí em diante, até morrer com setenta e seis anos, sua criatividade matemática não conheceu limites.

Sua carreira o levou ao exterior por longos períodos. Em 1727 ele aceitou um convite para ingressar na Academia de Ciências de São Petersburgo. Novamente os Bernoullis estavam envolvidos. Enquanto recebia lições de Johann, Euler fizera amizade com seus dois filhos, Daniel e Nicolaus. Os jovens Bernoullis, havia alguns anos, faziam parte da Academia de São Petersburgo (tragicamente, Nicolaus lá se afogou, terminando prematuramente com a promissora carreira de outro Bernoulli), e eles convenceram a academia a estender seu convite para Euler. Mas no mesmo dia em que Euler chegou em São Petersburgo, para assumir seu novo posto, a imperatriz Catarina I morreu, mergulhando a Rússia em um período de incertezas e repressão. A Academia foi considerada uma despesa desnecessária pata o orçamento do Estado e seu financiamento foi reduzido. Assim, Euler começou a trabalhar lá como assistente na área de fisiologia. Foi somente em 1733 que ele obteve o título de professor em matemática, sucedendo a Daniel Bernoulli, que retornara à Basiléia. Naquele ano, também, Euler casou-se com Catherine Gsell, eles tiveram treze filhos, m-as apenas cinco sobreviveram à infância.

Euler ficou quatorze anos ná Rússia. Em 1741 aceitou um convite de Frederico, o Grande, para colaborar com a Academia de Ciências de Berlim, a qual era parte do esforço do monarca para dar à Prússia um papel de destaque nas artes e nas ciências. Euler ficou lá durante vinte e cinco anos, nem sempre mantendo boas relações com Frederico. Os dois discordavam em questões de política acadêmica e também em personalidade, o monarca preferindo uma pessoa mais ativa do que o tranqüilo Euler. Durante^ste período Euler escreveu uma obra popular *Cartas para uma princesa alemã sobre assuntos da física e da filosofia* (publicada em três volumes, entre 1768 e 1772), na qual expressava seus pontos de vista sobre grande variedade de assuntos científicos. (A princesa era a neta de Frederico, e Euler lhe dava lições particulares.) As *Cartas* tiveram numerosas edições e traduções. Em toda a sua produção científica — fosse técnica ou didática — Euler sempre usava uma linguagem simples e clara, tornando fácil seguir a sua linha de pensamento.

Em 1766 Euler, agora com quase sessenta anos de idade, aceitou um convite da nova governante da Rússia, Catarina II (a “Grande”), para voltar a São Petersburgo (seu sucessor em Berlim foi Lagrange). Embora a imperatriz concedesse a Euler todos os benefícios materiais possíveis, sua vida, durante este período, foi marcada por inúmeras tragédias. Durante sua primeira estadia na Rússia, Euler perdera a visão do olho direito (de acordo com um relato, devido ao excesso de trabalho, de acordo com outro, porque observara o sol sem proteger os olhos). Em 1771, durante a segunda estada, ele perdeu a visão do outro olho. No mesmo ano sua casa pegou fogo e muitos de seus manuscritos foram perdidos. Cinco anos depois sua esposa morreu, mas o impecável Euler casou-se de novo, com setenta anos de idade. Agora, completamente cego, continuou a trabalhar como antes, ditando seus numerosos resultados para seus filhos e alunos. Nisto ele era ajudado por sua memória fenomenal. Diz-se que Euler era capaz de fazer contas, mentalmente, com números de cinqüenta dígitos e podia memorizar uma longa seqüência de argumentos matemáticos sem precisar escrevê-los no papel. Tinha enorme poder de concentração e freqüentemente trabalhava num problema difícil com os filhos no colo. Em 18 de setembro de 1783 ele estava calculando a órbita do planeta Urano, recém-descoberto. À noite, enquanto brincava com os netos, teve um derrame cerebral e morreu instantaneamente.

É quase impossível fazer justiça à imensa produção de Euler neste curto resumo. A enorme extensão de seu trabalho pode ser julgada pelo fato de que ele fundou duas áreas de pesquisa em campos opostos do espectro matemático: uma é a teoria dos números, o mais “puro” de todos os ramos da matemática; enquanto a outra é a mecânica analítica, a mais “aplicada” das matemáticas clássicas. Apesar das grandes contribuições de Fermat, o primeiro assunto ainda era considerado, na época de Euler, uma espécie de recreação matemática. Euler o transformou na mais respeitável área de pesquisa matemática. Na mecânica ele reformulou as três leis do movimento de Newton como um conjunto de equações diferenciais, transformando assim a dinâmica numa parte da análise matemática. Além disso, formulou as leis básicas da mecânica dos fluidos; e as equações que governam o movimento de um fluido, conhecidas como equações de Euler, são as fundações deste ramo da física matemática. Euler também é considerado um dos fundadores da topologia (então conhecida como *analysis situs* — "a análise de posição"), o ramo da matemática que lida com a deformação contínua das formas. Ele descobriu a famosa fórmula $V - E + F = 2$, que liga o número de vértices ao número de arestas e de faces de qualquer poliedro simples (um sólido que não possui orifícios).

O mais influente entre os numerosos trabalhos de Euler foi sua *Introductio in analysin infinitorum,* obra em dois volumes publicada em 1748 e considerada o alicerce da moderna análise matemática. Neste trabalho Euler resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas. Entre elas está o somatório da série $1/1^k+1/2^k+1/3^k+\ldots$ para todos os valores pares de k de 2 a 26 (para o caso de $k=2$ a série converge para $\pi^2/6$, como Euler já descobrira em 1736, resolvendo um mistério que desafiara até mesmo os irmãos Bernoulli). Em sua *Introductio* Euler fez da função a idéia central da análise. Sua definição de função é, essencialmente, aquela que hoje usamos na física e na matemática aplicada (embora, na matemática pura ela tenha sido substituída pelo conceito de "transformação"): "Uma função de uma quantidade variável é qualquer expressão analítica formada por essa quantidade variável e por números ou quantidades constantes." Esse conceito de função, é claro, não se originou com Euler e Johann Bernoulli já o definira em termos muito semelhantes. Mas foi Euler quem introduziu a notação moderna $f(x)$ para uma função e a usou para funções de todos os tipos — explícitas ou implícitas (na primeira a variável independente é isolada em um dos lados da equação, como em $y=x^2$; ao passo que, na última, as duas variáveis aparecem juntas como em $2x+3y=4$), contínuas ou descontínuas (suas funções descontínuas eram na verdade funções com uma derivada descontínua— uma súbita quebra na inclinação do gráfico mas não no gráfico em si), e funções com várias variáveis independentes, $u=f(x, y)$ e $u=f(x, y, z)$. Ele usou livremente a expansão das funções em séries infinitas e produtos — freqüentemente com uma atitude descuidada que atualmente não seria tolerada.

O *Introductio* pela primeira vez, chamava a atenção para o papel central do número e e da função e^x na análise. Como já esclarecemos, até a época de Euler a função exponencial era considerada meramente o inverso da função logarítmica. Euler colocou as duas funções em uma base igual, dando-lhes definições independentes:

$$e^x = \lim_{n \to \infty}(1 + x/n)^n \qquad (1)$$

$$\ln x = \lim_{n \to \infty} n(x^{1/n} - 1). \qquad (2)$$

Um indício de que as duas expressões são de fato inversas é este: se resolvermos a expressão $y = (1+x/n)^n$ para x, obteremos $x = n(y^{1/n} - 1)$. A tarefa mais difícil, além de trocar as letras x e y, é mostrar que os *limites* das duas expressões, à medida que n definem funções inversas. Isto exige alguns argumentos sutis relacionados com o processo de limite, mas na época de Euler, a manipulação descuidada de processos infinitos ainda era uma prática aceita. Assim, por exemplo, ele usou a letra i para indicar um "número infinito" e na verdade escreveu o lado direito da equação 1 como $(1+x/i)^i$, algo que nenhum aluno do primeiro ano se atraveria a fazer hoje.

Euler já tinha usado a letra *e*para representar o número 2,71828 … em um de seus primeiros trabalhos, um manuscrito intitulado "Meditação sobre Experimentos feitos recentemente sobre o disparo do Canhão", escrito em 1727, quando ele tinha apenas vinte anos (só foi publicado em 1862, oito anos depois de sua morte).[1] Em uma carta, escrita em 1731, o número *e* aparece de novo ligado a uma certa equação diferencial; Euler o define como "o número cujo logaritmo hiperbólico é =1" A primeira aparição de *é* em um trabalho *publicado* foi na *Mechanica* de Euler (1736), no qual ele estabeleceu as fundações da mecânica analítica. Por que teria escolhido a letra *ei* Não existe um consenso geral. De acordo com um ponto de vista, Euler a escolheu porque *e* é a primeira letra da palavra *exponencial.* Mais provavelmente a escolha ocorreu-lhe naturalmente, como a primeira letra "não usada" do alfabeto, já que as letras *a, b, c* e *d* aparecem freqüentemente em outras partes da matemática. Parece improvável que Euler tenha escolhido a letra *e* por ser a inicial de seu próprio nome. Ele era um homem muito modesto e amiúde atrasava a publicação de seu trabalho para que um colega ou estudante pudesse receber o devido crédito. De qualquer forma sua escolha do símbolo *e,* como vários de seus símbolos, foi aceita universalmente.

Euler usou sua definição da função exponencial (equação 1) para desenvolvê-la como uma série infinita de potências. Como vimos no Capítulo 4, para x =1, a equação 1 nos dá a série numérica

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots \qquad (3)$$

Se repetirmos os passos que levam à equação 3 (ver pág. 55) com x/n substituindo $1/n$, obteremos, depois de uma ligeira manipulação, a série infinita

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots \qquad (4)$$

que é uma série familiar de potências para *P.* Pode-se mostrar que esta série converge para todos os valores reais de *x,* de fato, o rápido aumento dos denominadores faz a série convergir muito rapidamente. É desta série que os valores numéricos dos e^x são geralmente obtidos; os primeiros termos são, em geral, suficientes para se obter a precisão necessária.

Em sua *Introductio,* Euler também lida com outro processo infinito, as frações contínuas. Tome por exemplo a fração 13/8. Nós podemos escrevê-la como 1+5/8 =1+l/(8/5) =1+1/(1+3/5); isto é,

$$\frac{13}{8}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}.$$

Euler provou que todo número racional pode ser escrito como uma fração contínua *finita,* enquanto um número irracional é representado por uma fração contínua infinita, onde a corrente de frações nunca termina. Para o número irracional √2*,* por exemplo, teremos

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Euler também mostrou como escrever uma série infinita como uma fração contínua infinita e vice-versa. Assim, usando a equação 3 como ponto de partida, ele derivou muitas frações contínuas interessantes, envolvendo o número?, duas das quais são:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \dots}}}}}$$

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

(O padrão da primeira fórmula torna-se claro se movermos o 2 inicial para o lado esquerdo da equação; isto nos dará uma expressão para a parte fracional de é*,* 0,718281…) Estas expressões são notáveis em sua regularidade, em contraste com a distribuição aparentemente casual dos dígitos na expansão decimal dos números irracionais.

Euler foi um grande matemático experimentalista. Ele brincava com fórmulas como uma criança com seus brinquedos, fazendo todo o tipo de substituições até obter alguma coisa interessante. Em geral os resultados eram sensacionais. Ele pegou a equação 4, a série infinita para e^x e, atrevidamente, substituiu sua variável real x pela expressão imaginária ix, onde $i = \sqrt{-1}$. Este foi um ato supremo de *chutzpah* matemático, já que, em todas as nossas definições da função e^x, a variável x tem sempre representado um número real. Substituí-lo por um número imaginário é brincar com símbolos sem sentido, mas Euler tinha suficiente fé em suas fórmulas para dar sentido ao sem significado. Ao substituir formalmente o x pelo ix na equação 4, nós temos

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots \qquad (5)$$

Agora, o símbolo i, definido como a raiz quadrada de -1, tem a propriedade de que suas potências inteiras se repetem em ciclos de quatro: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, e assim por diante. Em conseqüência, podemos escrever a equação 5 como

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + - \ldots \qquad (6)$$

Euler então cometeu um segundo pecado: mudou a ordem dos termos na equação 6, juntando todos os termos reais separadamente dos imaginários. Isso pode ser perigoso: diferente das somas finitas, onde sempre podemos alterar a ordem dos termos sem afetar o resultado, fazer o mesmo com uma série infinita pode afetar o somatório, ou mesmo mudar a série de convergente para divergente.[2] Mas na época de Euler ainda não se percebera isto completamente. Ele viveu numa era de experimentações descuidadas com processos infinitos — no espírito das fluxões de Newton e das diferenciais de Leibniz. Assim, ao mudar a ordem dos termos na equação 6, ele'chegou à série

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - - + \ldots\right). \qquad (7)$$

Já se sabia, na época de Euler, que as duas séries aparecendo entre os parênteses são as séries de potências das funções trigonométricas cosseno *x* e seno *x,* respectivamente. E assim Euler chegou à notável fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \qquad (8)$$

que liga de uma vez a função exponencial (ainda que de uma variável imaginária) à trigonometria ordinária.[3] Substituindo *ix* por – *ix* na equação 8 e usando as identidades cos(– *x*) =cos *x* e sen(– *x*) =– sen *x*, Euler obteve a equação semelhante

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \qquad (9)$$

Finalmente, somando-se e subtraindo as equações 8 e 9 permitiu que ele expressasse cos *x* e sen x em termos das funções exponenciais e^{ix} e e^{-ix}.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \qquad (10)$$

Essas relações são conhecidas como fórmulas de Euler para as funções trigonométricas (tantas fórmulas recebem seu nome que não é suficiente dizer apenas “fórmula de Euler”).

Embora Euler tivesse derivado muitos de seus resultados de um modo não rigoroso, cada uma das fórmulas aqui mencionadas resistiu ao teste do rigor — de fato, sua derivação adequada é hoje um exercício de rotina em cursos de cálculo avançado.[4] Euler, como Newton e Leibniz um século antes, foi um desbravador. A “arrumação”, a prova exata e rigorosa das muitas descobertas destes homens foi deixada para a geração seguinte de matemáticos, notavelmente para Jean-le-Rond D’Alembert (1717-1783), Jòseph Louis Lagrange (1736-1813) e Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Esses esforços continuaram até o século XX.[5]

A descoberta de uma notável conexão entre as funções exponencial e trigonométrica tornou quase inevitável o aparecimento de outras relações inesperadas. Assim, acrescentando $x=\pi$ na equação 8 e sabendo que cos π =–1 e sen π =0, Euler obteve a fórmula

$$e^{\pi i} = -1 \tag{11}$$

Se "notável" é a opinião adequada para as equações 8 e 9, então devemos procurar uma palavra mais apropriada para descrever a equação 11 — que certamente se coloca entre as mais belas fórmulas de toda a matemática. De fato, ao reescrevê-la como $e^{\pi i}+1=0$ obtemos uma fórmula que liga as cinco constantes mais importantes da matemática (e também as três operações matemáticas mais importantes — adição, multiplicação e exponenciação). Estas cinco constantes simbolizam os quatro grandes ramos da matemática clássica: aritmética, representada pelo 0 e pelo 1; a álgebra representada pelo *i;* a geometria pelo π e a análise pelo *e.* Não é de admirar que muitas pessoas tenham encontrado na fórmula de Euler todo o tipo de significados místicos. Edward Kasner e James Newman relatam um episódio em seu *Mathematics and the Imagination:*

> Para Benjamin Peirce, um dos principais matemáticos de Harvard no século XIX, a fórmula de Euler, $e^{\pi i}=-1$ veio como uma revelação. Ao descobri-la, um dia, ele se voltou para seus alunos e disse: "Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal; não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa. Mas conseguimos prová-la e portanto sabemos que deve ser verdade."[6]

NOTAS E FONTES

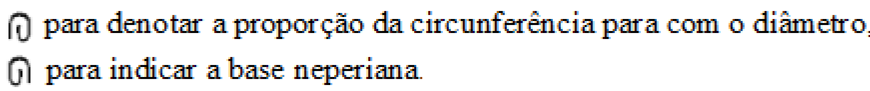
1. David Eugene Smith, em *A Source Book in Mathematics* (1929, reimpressão, Nova York: Dover, 1959), p. 95.
2. Para maiores detalhes, ver meu livro *To Infinity and Beyond: A*

Cultural Story of the Infinite (1987; reimpressão Princeton: Princeton University Press, 1991), pp. 2939.

3. Euler, contudo, não foi o primeiro a chegar a esca fórmula. Por volta de 1710 o matemático inglês Roger Cotes (1682-1716), que ajudou Newton a produzir a segunda edição do *Principia,* apresentou a fórmula $\log(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = i\theta$, que *é* equivalente à fórmula de Euler. Ela aparece no principal trabalho de Cotes, *Harmonia mensuraram,* publicado postumamente em 1722. Abraham DeMoivre (1667-1754), cujo nome é mencionado na epígrafe deste capítulo, descobriu a famosa fórmula $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$, à qual, a luz da fórmula de Euler, torna-se a identidade $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. De Moivre nasceu na França, mas passou a maior parte de sua vida em Londres. Como Cotes, era membro do círculo de Newton e participou da comissão da Sociedade Real que investigou a disputa de prioridade entre Newton e Leibniz sobre a invenção do cálculo.
4. Na verdade Euler também cometeu seus erros. Por exemplo, ao tomar a identidade $x/(1-x) + x/(x-1) = 0$ e usando uma divisão extensa para cada termo, ele chegou à fórmula $\ldots + 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + \ldots = 0$, claramente um resultado absurdo, (já que a série $1 + 1/x + 1/x^2 + \ldots$ converge apenas para $|x| > 1$, enquanto a série $x + x^2 + \ldots$ converge apenas para $|x| < 1$, não tem sentido somar as duas séries.) O descuido de Euler vem do fato de que ele considerava o valor de uma série infinita como sendo o valor da função representada pela série. Hoje sabemos que tal interpretação é válida apenas dentro do intervalo de convergência da série. Ver *Mathematics: The Loss of Certainty,* de Morris Kline (Nova York: Oxford Universíty Press, 1980),pp. 140-145.
5. Idem, Cap. 6.
6. (Nova York: Simon and Schuster, 1940), pp. 103-104. A admiração de Peirce pela fórmula de Euler o levou a propor dois símbolos um tanto incomuns para π e *e* (ver pág. 210).

Um episódio curioso na história de e

Benjamin Peirce (1809-1880) tornou-se professor de matemática no Harvard College aos vinte e quatro anos.[1] Inspirado pela fórmula de Euler $e^{\pi i}$ =— 1, ele concebeu novos símbolos para π e *e* argumentando que os símbolos que agora usamos para denotar a base neperiana e a proporção da circunferência do círculo para com seu diâmetro são, por muitos motivos, inconvenientes e a relação próxima entre estas duas quantidades deve ser indicada em sua notação. Eu proponho os seguintes caracteres, que, tenho usado com sucesso em minhas aulas: –


para denotar a proporção da circunferência para com o diâmetro,
para indicar a base neperiana.

Deve se notar que o primeiro símbolo é uma modificação da letra *c* (*circunferência*), e o último de *b (base)*. A ligação entre estas quantidades *é* mostrada pela equação,

Peirce publicou esta sugestão no *Matbematical Monthly* de fevereiro de 1859 e a usou em seu livro *Anaiytic Mechanics* (1855). Seus dois filhos, Charles Saunders Peirce e James Mills Peirce, também matemáticos, usaram a notação do pai, e James Mills ilustrou sua *Three and Four Place Tables* (1871) com a equação $\sqrt{e^{\pi}} = {}^{i}\sqrt{i}$ (fig. 68).[2]

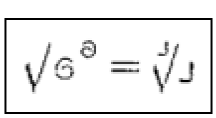


Fig. 68. Os símbolos de Benjamin Peirce para π*, e* e *i* aparecem na folha de rosto de *Three and Four Places Tables* (Boston, 1871), de James Mills Peirce. A fórmula é de Euler, $e^{\pi i}$ =— 1 disfarçada. Reprodução autorizada de

A History of Mathematical Notations, de Florian Cajori (1928-1929); La Salle, 111.; open Court, (1951).

Não nos surpreende que a sugestão não tenha sido recebida com grande entusiasmo. Além das dificuldades tipográficas para imprimir esses símbolos, é necessário um pouco de habilidade para distinguí-los. Dizem que seus alunos preferiam os tradicionais π e *e*.[3]

NOTAS E FONTES

1. David Eugene Smith, em *History ofMathemãtics,* 2 vols. (1923, reimpressão Nova York, Dover, 1958), 1:532.
2. Esta equação, assim como a equação de Benjamin Peirce $e^{\pi} = (-1)^{-i}$, pode ser derivada da fórmula de Euler através de uma manipulação formal dos símbolos.
3. Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations,* vol. 2, *Higher Mathematics* (1929, reimpressão La Salle, III.: Open Court, 1929), pp. 14-15.

14

e^{x+iy}: O imaginário torna-se real

Que este assunto [números imaginários] tenha até aqui sido cercado por uma obscuridade misteriosa é atribuído, largamente, a uma notação mal-adaptada. Se, por exemplo, $+1$, -1, *e* $\sqrt{-7}$ *fossem chamados unidades direta, inversa e lateral, em vez de positivo, negativo e imaginário (ou mesmo impossível), tal obscuridade estaria fora de questão.*

– CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)[1]

A introdução de expressões como e^{ix} na matemática levanta a seguinte questão: o que, exatamente, queremos dizer com tal expressão? Já que o expoente *é* imaginário, não podemos calcular os valores de e^{ix} do mesmo modo como podemos encontrar o valor de, digamos, $e^{3,52}$ — a menos, *é* claro, que possamos explicar o que significa “calcular” no caso dos números imaginários. Isto nos leva de volta ao século XVI, quando a quantidade $\sqrt{-1}$ apareceu pela primeira vez no cenário matemático.

Uma aura de misticismo ainda cerca o conceito que, desde então, tem sido chamado de “números imaginários”, e quem quer que encontre esses números pela primeira vez fica intrigado com suas propriedades estranhas. Mas “estranho” é algo relativo: com suficiente familiaridade o objeto estranho de ontem se torna o comum de hoje. De um ponto de vista matemático os números imaginários não são mais estranhos do que, digamos, os números negativos.

Eles são mais simples para se lidar, com certeza, do que as frações ordinárias, com sua “estranha” lei da adição $a/b+c/d=(ad+bc)/bd$. De fato, dos cinco números famosos, que aparecem na fórmula de Euler $e^{\pi i}+1 =0$, $i =\sqrt{-1}$ é talvez o menos interessante. São as *conseqüências* de se aceitar este número no nosso sistema numérico que tornam os números imaginários — e sua extensão para os números complexos tão importantes para a matemática. Assim como os números negativos surgiram da necessidade de se resolver a equação linear $x+a =0$, quando o a é positivo, os números imaginários surgiram da necessidade de se resolver a equação do segundo grau $x^2+a =0$ quando a *é* positivo. Especificamente, o número $\sqrt{-1}$, a "unidade imaginária", é definido como uma das duas soluções da equação $x^2+1 =0$ (a outra sendo $-\sqrt{-1}$), assim como o número -1, a "unidade negativa", é definida como a solução da equação $x+1 =0$. Agora, resolver a equação $x^2+1 =0$ significa encontrar o número cujo quadrado é -1. É claro que nenhum número real vai satisfazer esta condição, porque o quadrado de qualquer número real é sempre não negativo. Assim, *no domínio dos números reais* a equação $x^2+1 =0$ não tem solução, exatamente como no domínio dos números positivos a equação $x+1 =0$ não tem solução.

Durante dois mil anos a matemática floresceu sem se importar com essas limitações. Os gregos (com uma exceção: Diofanto em sua *Aritmética,* cerca de 275 d.C.) não reconheciam números negativos e nem precisavam deles; seu interesse principal era a geometria, e para a descrição de quantidades tais como comprimento, área e volume, os números positivos são inteiramente suficientes. O matemático hindu Brahmagupta (c. 628) usou números negativos, mas a Europa medieval em geral os ignorou, considerando-os "imaginários" ou "absurdos". De fato, enquanto consideramos a subtração como um ato de "tirar alguma coisa", os números negativos são absurdos: não se pode tirar cinco maçãs de três. Mas os números negativos continuaram a forçar sua presença na matemática de outros modos, principalmente como raízes de equações quadráticas e cúbicas, mas também em conexão com problemas práticos (Leonardo Fibonacci, em 1225, interpretou uma raiz negativa, que surgiu de um problema financeiro, como uma perda, em vez de um ganho). Ainda assim, durante a Renascença, os matemáticos não se sentiam confortáveis com eles, Um passo importante em direção à aceitação final foi dado por Rafael Bombelli (nascido por volta de 1530), que interpretou os números como comprimentos de uma linha e as quatro operações aritméticas como movimentos ao longo dessa linha, dando assim uma interpretação geométrica para os números reais. Mas somente quando se percebeu que a subtração poderia ser interpretada como o *inverso da adição* foi que tornou-se possível uma aceitação total dos números negativos no nosso sistema numérico,[2]

Os números imaginários passaram por uma evolução semelhante. A impossibilidade de se resolver a equação $x^2+a=0$, quando *a é* positivo, era conhecida há séculos, mas as tentativas de superar a dificuldade demoraram a acontecer. Uma das primeiras foi feitas, em 1545, quando o italiano Girolamo Cardano (1501-1576) tentou encontrar dois números cuja soma fosse 10 e cujo produto fosse 40. Isto leva à equação quadrática $x^2 - 10x+40 =0$, cujas duas soluções — facilmente encontradas a partir da fórmula quadrática — são $5+\sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$. A princípio Cardano não sabia o que fazer com essas "soluções", porque não podia encontrar seus valores. Mas ele ficou intrigado com o fato de que, se operasse com essas soluções imaginárias de um modo puramente formal, como se elas obedecessem a todas as regras da aritmética ordinária, as duas soluções de fato preenchiam as condições do problema: $(5+\sqrt{-15})+(5 - \sqrt{-15}) =10$ e $(5+\sqrt{-15}).\ (5 - \sqrt{-15}) =25 - 5 \sqrt{-15}+5 \sqrt{-15} - (\sqrt{-15})^2 =25 - (- 15) =40$.

Com a passagem do tempo, quantidades na forma $x+(\sqrt{-1})y$ — hoje em dia chamadas de *números complexos* e escritas como $x+iy$, onde x e y são números reais e $i =\sqrt{-1}$ — foram encontrando o seu lugar na matemática. Por exemplo, a solução geral da equação cúbica (de terceiro grau) exige que se lide com essas quantidades, mesmo que a solução final se revele real. Mas foi apenas no início do século XIX que os matemáticos sentiram-se acostumados com os números complexos para aceitá-los como números de boa qualidade.

Dois desenvolvimentos ajudaram muito neste processo. Em primeiro lugar, por volta de 1800 ficou demonstrado que a quantidade $x+iy$ poderia receber uma interpretação geométrica simples. Num sistema de coordenadas retangulares nós marcamos o ponto P cujas coordenadas são x e y. Se interpretarmos os eixos dos x e dos y como eixos "real" e "imaginário", respectivamente, então o número complexo $x+iy$ será representado pelo ponto P (x, y), ou, de modo equivalente, pelo segmento de linha (vetor) OP (fig. 69). Podemos então somar ou subtrair números complexos do mesmo modo como somamos ou subtraímos vetores, somando e subtraindo, separadamente, a componente real e a imaginária; por exemplo, $(1+3i)+(2-5i)=3-2i$ (fig. 70). Esta representação gráfica foi sugerida, mais ou menos ao mesmo tempo, por três cientistas em países diferentes: Caspar Wessel (1745-1818), um agrimensor norueguês em 1797; Jean Robert Argand (1768-1822) da França, em 1806; e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), da Alemanha, em 1831.

O segundo desenvolvimento foi devido ao matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865). Em 1835 ele definiu os números complexos de um modo puramente formal ao tratá-los como *pares ordenados* de números reais, sujeitos a certas regras de operação. Um "número complexo" é definido como o par ordenado (a, b), onde a *e* b são números reais. Dois pares (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente *se*, $a=c$ e $b=d$. Multiplicando o par (a, b) por um número real k (um "escalar") produz-se o par (ka, kb). A soma dos pares (a, b) e (c, d) *é* o par $(a+c, b+d)$ e seu produto é *o* par $(ac-bd, ad+bc)$. O significado por trás da aparentemente estranha definição de multiplicação torna-se claro se multiplicarmos o par (0, 1) por si mesmo: de acordo com a regra que acabamos de apresentar, teremos $(0, 1).(0, 1)=(0.0 - 1.1, 0.1+1.0)=(-1,0)$. Se agora concordarmos em denotar qualquer par cuja segunda componente é 0 pela letra denotando sua primeira componente e o considerarmos um número "real" — ou seja, se identificarmos o par $(a, 0)$ com o número real a — então poderemos escrever o último resultado como $(0, 1).(0, 1)=-1$. Denotando o par (0, 1) pela letra i então teremos $i.I=-1$, ou simplesmente $i^2=-1$. Além disso, agora podemos escrever qualquer par (a, b) como $(a, 0)+(0, b)=a(1,0)+b(0,1)=a.1+b.i=a+ib$, isto é, como um número complexo ordinário. Assim retiramos dos números complexos qualquer traço restante de mistério; de fato, a única lembrança de sua evolução problemática é o símbolo i de "imaginário". A abordagem rigorosa de Hamilton marcou o início da álgebra axiomática: o desenvolvimento passo a passo de um assunto, a partir de um pequeno conjunto de definições simples (os "axiomas") e uma corrente de conseqüências lógicas ("teoremas") deles derivados. O método axiomático não era novidade na matemática, é claro; era seguido, dogmaticamente, na geometria, desde que os gregos estabeleceram esta ciência como uma disciplina matemática de dedução rigorosa, imortalizada nos *Elementos* de Euclides (cerca de 300 a.C.). Agora, em meados dos 1800, a álgebra seguia o exemplo da geometria.

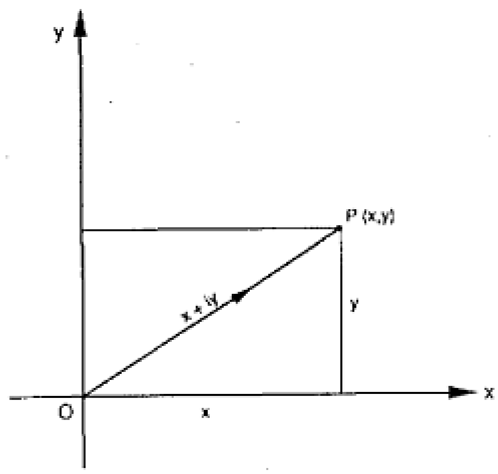


Figura 69. Um número x complexo *x*+ *iy* pode ser representado pelo segmento dirigido de reta, ou vetor *OP*

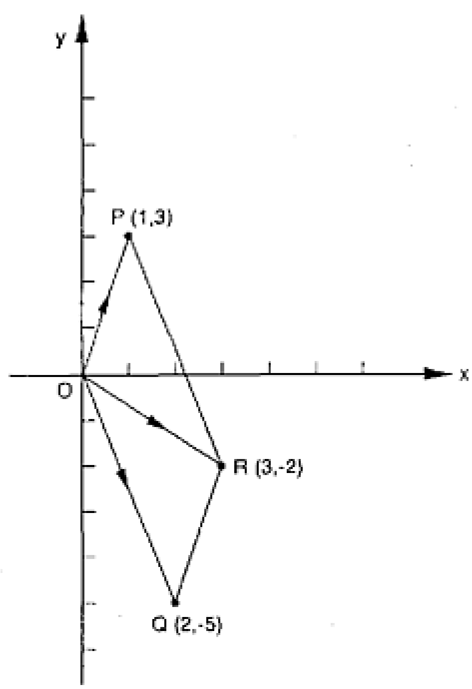


Figura 70. Para somar dois números complexos, somamos os seus vetores (1+3*i*)+(2 – 5*i*) =3 – 2*i*.

Uma vez superadas as dificuldades psicológicas de se aceitar os números complexos, estava aberta a estrada para novas descobertas. Em 1799, em sua dissertação de doutorado, aos vinte e dois anos, Gauss deu a primeira demonstração rigorosa de um fato que já era conhecido há algum tempo: um polinômio de grau n (ver pág. 131) sempre possui pelo menos uma raiz no domínio dos números complexos (de fato, se contarmos raízes repetidas como raízes separadas, um polinômio de grau n terá, exatamente, n raízes complexas).[3] Por exemplo, o polinômio $x^3 - 1$ possui as três raízes (isto é, soluções da equação $x^3 - 1 = 0$) 1, $(-1+i\sqrt{3})/2$ e $(-1 - i\sqrt{3})/2$, como pode ser facilmente verificado, se calcularmos o cubo de cada número. O teorema de Gauss é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra; e mostra que os números complexos não são apenas necessários para resolver uma equação polinomial geral, eles também são *suficientes*.[4]

A aceitação dos números complexos no âmbito da álgebra teve um impacto também na análise. O grande sucesso do cálculo diferencial e integral levantou a possibilidade de estendê-lo às *funções de variáveis complexas*. Formalmente, podemos estender a definição de Euler de uma função (pág. 202) para as variáveis complexas, sem mudar uma única palavra; basta permitir que as constantes e variáveis assumam valores complexos. Mas, de um ponto de vista geométrico, tal função não pode ser marcada como um gráfico em um sistema de coordenadas de duas dimensões, porque *cada uma* das variáveis agora exige, para sua representação, um sistema de coordenadas de duas dimensões, isto é, um plano. Para interpretar geometricamente tal função, devemos pensar nisso como uma *transformação* de um plano para outro.

Vamos ilustrar isso com a função $w = z^2$, onde ambos, z e w são variáveis complexas. Para descrever esta função geometricamente precisamos de dois sistemas de coordenadas, um para a variável independente z e outro para a variável dependente w. Escrevendo $z = x+iy$ e $w-u+iv$, teremos $u+iv = (x+iy)^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2+xiy+iyx+i^2y^2 = x^2+2iy - y^2 = (x^2 - y^2)+i(2xy)$. Igualando as partes real e imaginária em ambos os lados desta equação, teremos $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Agora suponha permitirmos que as variáveis x e y tracem alguma curva no plano z (o plano xy). Isto forçará as variáveis u e v a traçarem outra curva no plano w (o plano uv). Por exemplo, se o ponto $P(x, y)$ se move ao longo da hipérbole $x^2 - y^2 = c$ (onde c é uma constante), o ponto projetado $Q(u, v)$ vai se mover ao longo da curva $u = c$, isto é, ao longo da linha vertical no plano *w.*

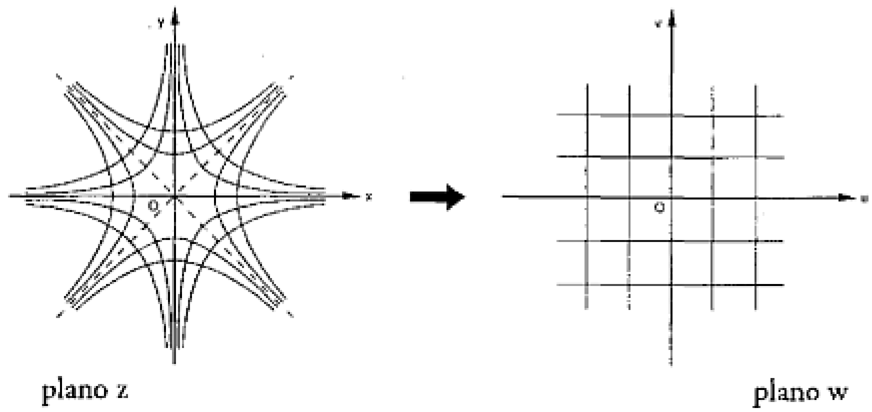


Figura 71. Transformação dada pela função complexa $w = z^2$.

De modo semelhante, se P se move ao longo da hipérbole $2xy = k =$contante, Q vai traçar a linha horizontal $v = k$ (fig. 71). As hipérboles $x^2 - y^2 = c$ e $2xy = k$ formam duas famílias de curvas no plano *z,* cada curva correspondendo a um dado valor da constante. Suas curvas projetadas formam uma grade retangular de linhas horizontais e verticais no plano *w.*

Será que podemos diferenciar agora a função $w = f(z)$, onde ambas, z e w são variáveis complexas, do mesmo modo como diferenciamos a função $y = f(x)$ das variáveis reais x e y? A resposta é sim — com uma advertência. Para começar, nós não podemos mais considerar a derivada de uma função como a inclinação de uma linha tangente em seu gráfico, porque a função de uma variável complexa não pode ser representada por um único gráfico; ela é uma transformação feita de um plano para o outro. Ainda assim nós podemos tentar o processo de diferenciação de modo puramente formal, encontrando a diferença nos valores de $w = f(z)$ entre dois pontos "vizinhos" z e $z + \Delta z$, dividindo a diferença por Δz e partindo para o limite quando $\Delta z \to 0$. Isto nos dará, pelo menos formalmente, uma medida da taxa de variação *de* $f(z)$ no ponto z. Mas, mesmo neste processo formal, encontramos uma dificuldade que não existe nas funções de variáveis reais.

Inerente ao conceito de limite encontra-se a pressuposição de que o resultado final do processo de limitação será o mesmo, não importando como a variável independente se aproxima de seu valor "final". Por exemplo, ao encontrar a derivada de $y = x^2$ (pág. 117), começamos com algum valor fixo de *x,* digamos x_0, e então nos movemos para o ponto vizinho $x = x_0 + \Delta x$, encontramos a diferença Δy nos valores de *y* entre esses pontos e dividimos esta diferença por Δx, finalmente encontrando o limite de $\Delta y/\Delta x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Isto nos deu $2x_0$, o valor da derivada em x_0. Agora, ao deixar Δx se aproximar de 0, presumimos — embora nunca o disséssemos tão explicitamente — que o mesmo resultado deveria ser obtido independente de como fazemos $Ax \rightarrow 0$. Por exemplo, poderíamos deixar Δx se aproximar de 0 apenas através dos valores positivos (isto é, fazer x se aproximar de x_0 a partir do lado direito) ou apenas através de valores negativos (*x* se aproximando de x_0 a partir da esquerda). A pressuposição tácita é a de que o resultado final — a derivada de $f(x)$ em x_o — independe do modo pelo qual $\Delta x \rightarrow 0$. Para a grande maioria das funções que encontramos na álgebra elementar, este é um detalhe sutil, quase pedante, porque essas funções são geralmente uniformes e contínuas — seus gráficos não possuem cantos agudos ou quebras súbitas. Portanto, não precisamos nos preocupar quando calculamos as derivadas destas funções.[5]

Porém quando chegamos nas funções de variáveis complexas, essas considerações tornam-se cruciais. Diferente da variável real *x*, uma variável complexa *z* pode se aproximar de um ponto z_0 por um número infinito de direções (lembre-se de que só a variável independente exige todo um plano para sua representação). Assim, dizer que o limite de $\Delta w/\Delta z$, quando $\Delta z \rightarrow 0$ existe, implica que o valor (complexo) do limite seja independente da direção ao longo da qual $z \rightarrow z_0$.

Pode-se demonstrar que este requerimento formal leva a um par de equações diferenciais da maior importância para o cálculo de variáveis complexas. Elas sao conhecidas como equações de Cauchy-Riemann, em homenagem a Augustin Louis Cauchy (1789-1857), da França e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) da Alemanha. Derivar essas equações iria além do objetivo deste livro,[6] portanto vamos mostrar apenas como funcionam. Dada a função $w = (fz)$, de uma variável complexa *z*, se escrevermos $z = x + iy$ e $w = u + iv$, então ambas, *u* e *v* tornam-se funções (com valores reais) das variáveis (reais) *x* e *y,* em símbolos, $w = (fz) = u(x, y) + iv(x,y)$. Por exemplo, no caso da função $w = z^2$ constatamos que $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$. As equações de Cauchy-Riemann nos dizem que, para a função $w =$

(fz) ser diferenciável (isto é, ter uma derivada) em um ponto z do plano complexo, a derivada de u em relação a x deve ser igual à derivada de v em relação a y, e a derivada de u em relação a y deve ser igual à derivada *negativa* de v em relação a x. Todas as derivadas devem ser calculadas no ponto $z = x+iy$ em questão.

É claro que seria muito mais simples expressar essas relações em linguagem matemática em vez de palavras, mas primeiro precisamos introduzir uma nova notação para a derivada neste caso. Isto porque ambas, u e v, são funções de *duas* variáveis independentes e precisamos indicar com relação a qual variável estamos diferenciando. Nós denotamos as derivadas que acabamos de mencionar pelos símbolos $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ e $\partial v/\partial y$. As operações $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ são chamadas *derivadas parciais* em relação a x e y, respectivamente. Ao calcular essas derivadas, mantemos fixas todas as variáveis, exceto aquelas indicadas pelo símbolo de diferenciação. Assim, em $\partial/\partial x$ nós mantemos o valor de y fixo enquanto em $\partial/\partial y$ *é* o valor de x que permanece fixo. As equações de Cauchy-Riemann dizem que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Para a função $w = z^2$, temos $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$, de modo que $\partial u/\partial x = 2x$, e $\partial u/\partial y = - 2y$, $\partial v/\partial x = 2y$ e $\partial v/\partial y = 2x$. As equações de Cauchy-Riemann ficam assim satisfeitas para todos os valores de x e de y, e, conseqüentemente $w = z^2$ é diferenciável em cada ponto z do plano complexo. De fato, se repetirmos formalmente o processo de encontrar a derivada de $y = x^2$ (ver pág. 117), com o x substituído pelo z e o y pelo w, obteremos $dw/dz = 2z$. Esta fórmula dá o valor (complexo) da derivada para cada ponto no plano z. As equações de Cauchy-Riemann, embora não estejam diretamente envolvidas no cálculo da derivada, fornecem uma condição necessária (e com uma ligeira mudança nas pressuposições, também suficiente) para que a derivada *exista* no ponto em questão.

Se uma função $w = (fz)$ *é* diferenciável em um ponto z do plano complexo, dizemos que $f(z)$ é *analítica* em z. Para que isto aconteça, as equações de Cauchy-Riemann devem ser preenchidas naquele ponto. Esta hipótese é uma exigência muito mais forte do que a mera diferenciação no domínio real. Mas uma vez que se demonstre que a função é analítica ela obedece a todas as regras

familiares da diferenciação que se aplicam a funções de variáveis reais. Por exemplo, as fórmulas de diferenciação para a soma e o produto de duas funções, a regra da cadeia, e a fórmula $d(x^n)/dx = nx^{n-1}$ continuam valendo quando a variável real *x é* substituída pela variável complexa *z.* Dizemos que as propriedades da função $y = f(x)$ são *transportadas para o domínio complexo.*

Depois desta incursão um tanto técnica na teoria geral das funções complexas, estamos prontos para voltar ao nosso assunto: a função exponencial. Tomando como nosso ponto de partida a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, podemos considerar o lado direito desta equação como a *definição* da expressão e^{ix} que até agora não fora definida. Mas podemos fazer melhor do que isso: tendo permitido que o expoente assumisse valores imaginários, por que não deixá-lo assumir valores *complexos* também? Em outras palavras, queremos dar um significado à expressão e^z, quando $z = x+iy$. Podemos tentar abrir caminho de um modo puramente manipulativo, no espírito de Euler. Presumindo que e^z obedece a todas as regras familiares da função exponencial de variável real, temos

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \qquad (2)$$

É claro que o elo fraco neste argumento é a suposição feita de que a expressão indefinida e^z *se* comporta de acordo com as boas e velhas regras da álgebra de variáveis reais. Trata-se realmente de um ato de fé e, de todas as ciências, a matemática é a que menos perdoa os atos de fé. Mas existe uma saída: por que não virar a mesa e *definir* e^z por meio da equação 2? Isto, certamente estamos livres para fazer, pois nada na definição vai contradizer o que já foi estabelecido sobre a função exponencial.

É claro que na matemática estamos livres para definir um novo objeto de qualquer maneira que desejarmos, desde que a definição nlo contradiga quaisquer definições previamente aceitas nem fatos estabelecidos. A questão real é: será a definição justificada pelas propriedades do novo objeto? Em nosso caso a justificativa para denotar o lado esquerdo da equação 2 por e^z é o fato de que esta definição garante que o novo objeto, a função exponencial de uma variável complexa, se comporta exatamente como desejamos: ela preserva todas as propriedades formais da função de valor real e^x. Por exemplo, assim como temos $e^{x+y} = e^x . e^y$ para quaisquer números reais x e y, assim temos $e^{w+z} = e^w . e^z$ para quaisquer dupla de números complexos w e z.[7] Além disso, se z for real (isto é, se $y = 0$), o lado direito da equação 2 nos dá $e^x (\cos 0 + i \text{ sen } 0) = e^x (1 + i . 0) = e^x$, de modo que a função exponencial de uma variável real é incluída como um caso especial na definição de e^z.

E quanto à derivada de e^z? Pode-se demonstrar que se uma função $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável no ponto $z = x+iy$, sua derivada neste ponto será dada por

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (3)$$

(ou, alternativamente por $\partial v/\partial y - i\partial u/\partial y$, as duas expressões são iguais à luz das equações de Cauchy-Riemann). Para a função $w = e^z$, a equação 2 nos dá $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \text{ sen } y$, de modo que $\partial u/\partial x = e^x \cos y$ e $\partial v/\partial x = e^x \text{ sen } y$. Portanto, teremos

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \qquad (4)$$

Assim a função e^z *é* igual à sua derivada, exatamente como acontece com a função e^x.

Devemos mencionar que existe uma abordagem alternativa ao desenvolvimento da teoria das funções de variáveis complexas, ou *teoria das funções* como é conhecida em resumo. Esta abordagem foi iniciada por Cauchy e aperfeiçoada pelo matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897), e faz um uso extenso das séries de potências. A função e^z, por exemplo, é definida como

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \qquad (5)$$

uma definição motivada pela definição de Euler para e^x como o limite de

$(1+x/n)^n$ quando $n \to \infty$ (ver pág. 204). Os detalhes excedem o objetivo deste livro, mas a essência do argumento é mostrar que a série de potências (5) converge para todos os valores de z no plano complexo e pode ser diferenciada termo a termo, exatamente como um polinômio ordinário (finito). Todas as propriedades de e^z podem, portanto, ser derivadas desta definição, em particular a fórmula $d(e^z)/dz = e^z$ que se obtém imediatamente, diferencíando-se, termo por termo a série (5), como o leitor pode verificar facilmente.

Neste ponto já estendemos a função exponencial para o domínio complexo, de modo que todas as propriedades familiares do domínio real estão preservadas. Mas qual é a utilidade disso? Que informação nova obtivemos? Na verdade, se fosse apenas uma questão de substituir formalmente a variável real x pela variável complexa z, o processo quase não se justificaria. Felizmente, a extensão de uma função para o domínio complexo traz alguns benefícios. Já vimos um deles: a interpretação das funções complexas como uma transformação do plano z para o plano w.

Para ver que tipo de transformação é efetuado pela função $w = e^z$, devemos nos afastar brevemente do nosso assunto principal e falar sobre a representação polar de um número complexo. Como vimos no capítulo 11, pode-se localizar um ponto P no plano, ou por suas coordenadas retangulares (x,y) ou por suas coordenadas polares (r,Θ). Do triângulo retângulo OPR na figura 72, podemos ver que os dois pares de coordenadas se relacionam através das fórmulas $x = r \cos \Theta$, $y = r \operatorname{sen} \Theta$. Daí podemos escrever qualquer número complexo $z = x+iy$ como $z = r \cos \Theta + ir \operatorname{sen} \Theta$, ou, depois de fatorar r,

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \qquad (6)$$

Podemos encurtar ainda mais a equação 6 substituindo a expressão $\cos \Theta + i \operatorname{sen} \Theta$ pelo símbolo abreviado cis Θ. Daí teremos

$$z = x + iy = r \operatorname{cis} \theta . \qquad (7)$$

As duas formas de um número complexo, $x+iy$ e r cis Θ, são conhecidas, respectivamente, como representações retangular e polar de z

(aqui, como sempre acontece na análise, o ângulo θ *é* medido em radianos [ver págs. 159-60]). Como exemplo, o número z $=1+i$ tem a representação polar $\sqrt{2}$ cis $\pi/4$, porque a distância ao ponto $P(1, 1)$ da origem é $r = \sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2}$ e o segmento de reta *OP* forma um ângulo de $\theta = 45° = \pi/4$ radianos com o eixo positivo dos x.

A representação polar se revela particularmente útil quando multiplicamos ou dividimos números complexos. Tomemos $z_1 = r_1$ cis θ e $z_2 = r_2$ *cis* ϕ. Então

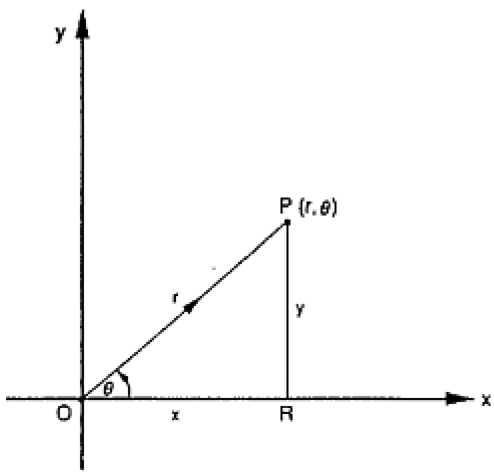


Figura 72. Representação polar de um número complexo.

$z_1z_2 = (r_1 \text{ cis } \theta)(r_2 \text{cis } \phi) = r_1r_2(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)(\cos\phi + i \text{ sen } \phi) = r_1r_2 [(\cos\theta \cos\phi - \text{sen } \theta \text{ sen } \phi + i (\cos\theta \text{ sen } \phi + \text{sen } \theta \cos\phi)]$. Se usarmos as fórmulas de adição para seno e cosseno (veja p. 149), as expressões dentro dos parênteses tornam-se, simplesmente, $\cos(\theta+\phi)$ e $\text{sen }(\theta+\phi)$, de modo que $z_1z_2 = r_1r_2 \text{cis } (\theta+\phi)$. Isto significa que, para multiplicar dois números complexos devemos multiplicar suas distâncias até a origem e *somar* seus ângulos. Em outras palavras, a distância sofre uma *dilatação* (esticamento), enquanto o ângulo sofre uma *rotação.* É esta interpretação geométrica que torna os números complexos tão úteis em numerosas aplicações — das vibrações mecânicas aos circuitos elétricos —, de fato, sempre que há rotações envolvidas.

Voltando à equação 2, podemos ver que seu lado direito tem exatamente a forma de uma representação polar, com e^x fazendo o papel de r e y *o* papel de Θ. Assim, se representarmos a variável $w = e^z$ em forma polar, como R (cos $\phi + i$ sen ϕ), teremos $R = e^x$ e $\phi = y$. Agora imagine que um ponto P no plano z move-se ao longo da linha horizontal $y = c$ =constante. Então seu ponto imagem Q, no plano w, vai se mover ao longo do raio $\phi = c$ (fig. 73). Em particular, a linha $y = 0$ (o eixo dos x) é mapeada sobre o raio $\phi = 0$ (o eixo positivo u), a linha $y = \pi/2$, no raio $\phi = \pi$ (eixo positivo v), a linha $y = \pi$ no raio $\phi = \pi$ (eixo negativo u) e — surpresa! — a linha $y = 2\pi$ é mapeada de novo no eixo positivo u. Isto ocorre porque as funções seno y e cosseno y que aparecem na equação 2, são periódicas — seus valores se repetem a cada 2π radianos (360°). E isso significa que a própria função e^z é periódica — de fato ela tem *um período imaginário* de 2π. E assim como é suficiente conhecer o comportamento das funções de valores reais sen x e cos x, dentro de um único período, digamos de $x = -\pi$ a $x = \pi$, assim também é suficiente conhecer o comportamento da função de valores complexos e^z em uma única faixa horizontal, digamos, de $y = -\pi$ a $y = \pi$ (mais precisamente, $-\pi < y \leq \pi$), denominado *domínio fundamental de* e^z.

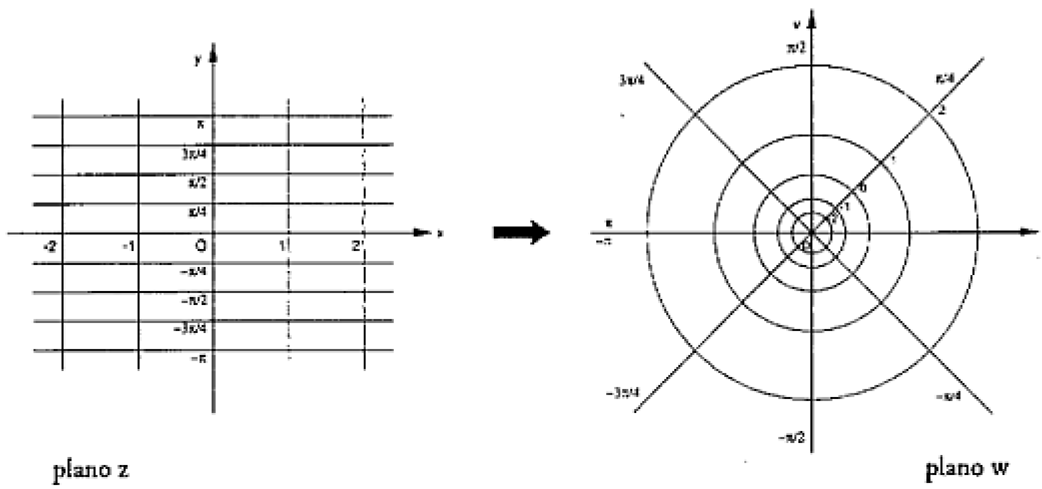


Figura 73. Transformação peia função complexa $w = e^z$.

Isso para linhas horizontais. Quando P se move ao longo da linha vertical $x = k$ =constante, sua imagem Q move-se ao longo da curva $R = e^k$ =constante, isto é, em um círculo com o centro na origem e o raio $R = e^k$ (veja novamente a figura 73). Para linhas verticais diferentes (valores diferentes de k) obteremos círculos diferentes, todos concêntricos na origem. Note, entretanto que se as linhas estiverem igualmente espaçadas, seus círculos de imagem aumentam *exponencialmente* — seus raios crescem em progressão geométrica. Nesse aspecto temos uma lembrança de que a função e^z tem suas raízes genealógicas na famosa relação entre progressões aritméticas e geométricas que levaram Napier a inventar seus logaritmos no início do século XVII.

ooo

O inverso da função de valores reais $y = e^x$ é a função de logaritmo natural $y = \ln x$. Exatamente do mesmo modo, o inverso da função de valores complexos $w = e^z$ *é o logaritmo natural complexo de* $z, w = \ln z$. Existe, contudo, uma diferença importante. A função $y = e^x$ tem a propriedade de que dois valores diferentes de x sempre produzem dois valores diferentes de y; isto pode ser visto no gráfico de e^x (Capítulo 10, fig. 31), que aumenta da esquerda para a direita ao longo de todo o eixo dos x. Uma função com tal propriedade *é* chamada de função *um para um.* Um exemplo de uma função que *não é* 1:1 *é* a parábola $y = x^2$, porque temos, por exemplo, $(-3)^2 = 3^2 = 9$. Estritamente falando, somente uma função 1:1 tem uma inversa, porque só então cada valor d e y será a imagem de exatamente um valor de x. Daí que a função $y = x^2$ não tem um inverso (embora possamos remediar a situação restringindo o domínio para $x \geq 0$). Pelo mesmo motivo, as funções trigonométricas $y = sen\ x$ e $y = \cos x$ não têm inversos. O fato de que essas funções são periódicas significa que valores de x abritrariamente grandes podem ter por imagem o mesmo y (de novo a situação pode ser remediada por uma eficiente restrição de domínio).

Como vimos anteriormente, a função complexa e^z *é* periódica. Desse modo, se fôssemos seguir as regras das funções de valores reais, esta função não possuiria inversa. Entretanto, como muitas das funções comuns de uma variável real se tornam periódicas quando estendidas ao domínio complexo, é costume relaxar a restrição 1:1 e permitir que uma função de variável complexa tenha um inverso mesmo que não seja injetiva, Isto significa que a função inversa dará a cada valor da variável independente vários valores da variável dependente. O logaritmo complexo é um exemplo de tal *função* *multivaluada.*

Nosso objetivo *é* exprimir a função w =ln z de forma complexa, como $u+iv$. Começamos com $w=e^z$ e escrevemos w em forma polar como R cis ϕ. Pela equação 2, então, teremos R cis $\phi=e^x$ cis$y$, Agora, dois números complexos serão iguais somente se tiverem a mesma distância da origem e a mesma direção em relação ao eixo real. A primeira dessas condições nos dá $R=e^x$. Mas a segunda condição *é* satisfeita não apenas quando $\phi=y$, mas também quando $\phi=y+2k\pi$, onde k *é* qualquer inteiro positivo ou negativo. Isto ocorre porque, qualquer raio emanando da origem corresponde a um número infinito de ângulos, diferindo um do outro por qualquer número de rotações completas (isto é, múltiplos inteiros de 2π). Temos assim $R=e^x$, ϕ) $=y+2k\pi$. Resolvendo esta equação para x e y, em termos de R e ϕ, obteremos $x=\ln R, y=\phi+2k\pi$ (na verdade $\phi-2k\pi$, mas o sinal negativo é irrelevante porque k pode ser qualquer inteiro, positivo ou negativo). Daí teremos $z=x+iy=\ln R+i(\phi+2k\pi)$. Trocando, como de costume, as letras das variáveis independente e dependente, finalmente chegamos a

$$w=\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi),\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{8}$$

A equação 8 define o *logaritmo complexo* de qualquer número complexo $z=r$ cis Θ. Como vemos, este logaritmo *é* uma função de valores múltiplos: um dado número z tem um número infinito de logaritmos, diferindo um do outro por múltiplos de 2πi. Como exemplo vamos encontrar o logaritmo de $z=1+i$. A forma polar deste número *é* $\sqrt{2}$cis $\pi/4$, de modo que $r=\sqrt{2}$ e$\Theta=\pi/4$. Pela equação 8 temos ln $z=\ln\sqrt{2}+i$ $(\pi/4+2\ k\pi)$. Para $k=0$, 1 , 2 , … obteremos os valores ln $\sqrt{2}+i(\pi/4)=0{,}3466+0{,}7854i$, ln $\sqrt{2}+i(9\pi/4)$ $\approx 0{,}3466+7{,}0686i$, ln $\sqrt{2}+i(17\ \pi/4)=0{,}3466+13{,}3518i$, e assim por diante. Valores adicionais são obtidos quando k for negativo.

E quanto ao logaritmo de um número *real?* Desde que o número real x *é* também o número complexo $x+0i$, esperamos que o logaritmo natural de $x+0i$ seja idêntico ao logaritmo natural de x. Isto, realmente, é verdade — quase.

fato de que o logaritmo complexo é uma função de valores múltiplos introduz valores adicionais não incluídos no logaritmo natural de um número real. Tome como exemplo o número $x=1$. Nós sabemos que ln 1 =0 (porque

$e^{\circ} = 1$). Mas quando consideramos o número real 1 como o número complexo $z = 1+0i = 1 \text{ cis } 0$, obtemos, da equação 8 $\ln z = \ln 1 + 1\ (0+2k\pi) = 0 + i(2k\pi) = 2k\pi i$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Assim, o número complexo $1+0i$ tem uma quantidade infinita de logaritmos — $0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i$, e assim por diante — todos exceto 0 sendo puramente imaginários. O valor 0 — e mais geralmente, o valor $\ln r + i\,\Theta$ obtido fazendo-se $k = 0$ na equação 8 — é chamado de *valor principal* do logaritmo e denotado por $\mathrm{Ln}\, z$.

ooo

Vamos agora retornar ao século XVIII e ver como essas idéias se estabeleceram. Como vimos, o problema de encontrar a área sob a hipérbole $y = 1/x$ fora um dos principais problemas matemáticos do século XVII. A descoberta de que esta área envolve logaritmos mudou o foco do papel original dos logaritmos, como uma ferramenta de cálculo, para as propriedades da *função* logarítmica. Foi Euler quem nos deu a definição moderna de logaritmo: se $y = b^x$, onde b é qualquer número positivo diferente de 1, então $x = \log_b y$ (leia-se como "logaritmo de y na base b"). Enquanto a variável x for real, $y = b^x$ será sempre positivo; portanto, *no domínio dos números reais,* o logaritmo de um número negativo não existe, exatamente como a raiz quadrada de um número negativo não existe no domínio dos números reais. Todavia, por volta do século XVIII, os números complexos já estavam bem integrados na matemática, assim, surgiu naturalmente a questão: o que é o logaritmo de um número negativo? Em particular, o que é $\ln(-1)$?

Esta pergunta deu origem a um debate animado. O matemático francês Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783), que morreu no mesmo ano que Euler, achava que $\ln(-x) = \ln x$, e portanto $\ln(-1) = \ln 1 = 0$. Seu raciocínio era que, como $(-x)(-x) = x^2$, deveríamos ter $\ln[(-x)(-x)] = \ln x^2$. Pelas regras de logaritmos, o lado esquerdo desta equação é igual a $2\ln(-x)$, enquanto o lado direito é $2\ln x$, assim obtemos, depois de cancelar o 2, $\ln(-x) = \ln x$. Mas esta "prova" tem uma falha porque ela aplica as regras da álgebra ordinária (isto é, de valores reais) ao domínio dos números complexos, no qual essas regras não necessariamente se sustentavam. (Ela é reminiscente da "prova" de que $i^2 = 1$ em vez de -1: $i^2 = (\sqrt{-1}).(\sqrt{-1}) = \sqrt{[(-1).(-1)]} = \sqrt{1} = 1$. O erro está no segundo passo, porque a regra $\sqrt{a}.\sqrt{b}$

$=\sqrt{(ab)}$ só é válida quando os números sob o sinal de raiz são positivos. Em 1747 Euler escreveu a D'Alembert dizendo que o logaritmo de um número negativo deve ser complexo e, portanto, tem *um número infinito de valores diferentes.* De fato, se x é um número negativo, sua representação polar será $|x|$ cis π, de modo que, da equação 8, teremos $\ln x = \ln|x| + i(\pi + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Em particular, para $x = -1$ teremos $\ln |x| = \ln 1 = 0$, de modo que $\ln(-1) = i(\pi + 2k\pi) = i(2k+1)\pi = \ldots, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, \ldots$ O valor principal de $\ln(-1)$ (o valor para $k = 0$) é portanto, πi, um resultado que também deriva diretamente da fórmula de Euler $e^{\pi i} = -1$. O logaritmo de um número *imaginário* também pode ser encontrado de modo semelhante; por exemplo, como a forma polar de $z = i$ é 1. Cis $\pi/2$, temos $\ln i = \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi) = 0 + (2k + 1/2)\pi i = \ldots, -3\pi i/2, \pi i/2, 5\pi i/2, \ldots$ Não é preciso dizer que, na época de Euler, tais resultados eram considerados estranhas curiosidades. Embora, naquela época, os números complexos já fossem plenamente aceitos no domínio da álgebra, sua aplicação às funções transcendentais ainda era novidade. Foi Euler quem abriu caminho mostrando que os números complexos podem ser introduzidos em funções transcendentais, desde que o resultado também seja considerado um número complexo. Esta nova abordagem produziu resultados totalmente inesperados. Ela mostrou que *potências imaginárias de um número imaginário podem ser reais.* Considere, por exemplo, a expressão i^i. Que sentido podemos dar a tal expressão? Em primeiro lugar, a potência de qualquer base pode sempre ser escrita como uma potência de base e usando-se a identidade

$$b^z = e^{z \ln b} \tag{9}$$

(esta identidade pode ser verificada tomando-se o logaritmo natural de ambos os lados e notando-se que $\ln e = 1$). Aplicando a equação 9 à expressão i^i, temos

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \cdot i(\pi/2 + 2k\pi)} = e^{-(\pi/2 + 2k\pi)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10}$$

Desse modo obtemos um número infinito de valores, todos eles reais — os primeiros (começando com $k = 0$ e contando para trás) são $e^{-\pi/2} \approx 0{,}208$, $e^{+3\pi/2} \approx 111{,}318$, $e^{+7\pi/2} \approx 59609{,}742$, e assim por diante. Num sentido muito literal, Euler fez o imaginário tornar-se real![8]

Há outras conseqüências do trabalho pioneiro de Euler com as funções complexas. Vimos no Capítulo 13 como a fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ leva a uma nova definição das funções trigonométricas, $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ e $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$. Por que não pegar essas definições e simplesmente substituir nelas a variável real x pela variável complexa z? Isso nos daria uma expressão formal para as *funções trigonométricas de uma variável complexa*:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{11}$$

É claro que, a fim de calcular os valores de $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ para qualquer número complexo z precisamos encontrar as partes real e imaginária dessas funções. A equação 2 nos permite expressar ambos e^{iz} e e^{-iz} em termos de suas partes reais e imaginárias: $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} (\cos x + i \operatorname{sen} x)$ e, de modo semelhante $e^{-iz} = e^{y} (\cos x - i \operatorname{sen} x)$. Substituindo essas expressões nas equações 11, obtemos, após algumas manipulações algébricas, as fórmulas

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

e (12)

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

onde cosh e senh denotam as funções hiperbólicas (ver pág. 188), Pode-se mostrar que essas fórmulas obedecem a todas as propriedades familiares das velhas funções trigonométricas de uma variável real. Por exemplo, as fórmulas $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, $d(\operatorname{sen} x)/dx = \cos x$, $d(\cos x)/dx = - \operatorname{sen} x$, e as várias fórmulas de adição, todas permanecem válidas quando a variável real x é substituída pela variável complexa $z = x + iy$.

Um caso especial, interessante, das equações 12, ocorre quando deixamos z tornar-se puramente imaginário, isto é, quando $x = 0$. Então temos $z = iy$ e as equações 12 tornam-se

$$\cos (iy) = \cosh y, \quad \operatorname{sen} (iy) = i \operatorname{senh} y. \tag{13}$$

Essas fórmulas notáveis mostram que o reino dos números complexos pode saltar livremente entre as funções circulares e hiperbólicas, enquanto no domínio real podemos apenas notar as analogias formais entre elas. A extensão ao domínio complexo remove, essencialmente, a distinção entre essas duas classes de funções.

Não apenas a extensão de uma função para o domínio complexo preserva todas as suas propriedades do domínio real, mas na verdade dá à função novas características. Neste mesmo capítulo vimos que a função $w = f(z)$, de uma variável complexa, pode ser interpretada como uma transformação do plano z para o plano w. Um dos teoremas mais elegantes da teoria das funções diz que, em cada ponto onde $f(z)$ *é* analítica (tem uma derivada), esta projeção é *conforme,* ou seja, mantém os ângulos. Com isso queremos dizer que se duas curvas no plano z se cruzam num ângulo α, suas imagens no plano *tu* também se cruzarão com um ângulo α. (O ângulo de interseção é definido como o ângulo entre as linhas tangentes às curvas no ponto de interseção; veja a fig. 74.) Por exemplo, vimos acima que a função $w = z^2$ projeta as hipérboles $x^2 - y^2 = c$ e $2xy = k$ sobre as linhas $u = c$ e $v = k$, respectivamente. Estas duas famílias de hipérboles são *ortogonais:* cada hipérbole de uma família corta a hipérbole da outra família num ângulo reto. Esta ortogonalidade é preservada na transformação, já que as curvas-imagens, $u = c$ e $v = k$ obviamente se cruzam sob ângulos retos (ver fig. 71). Um segundo exemplo é fornecido pela função $w = e^z$ que projeta as linhas $y = c$ e $x = k$ sobre os raios $\phi = c$ e os círculos $R = e^k$ respectivamente (fig. 73). Novamente vemos que o ângulo de interseção — um ângulo reto — é preservado; neste caso a conformalidade expressa o teorema bem conhecido de que cada linha tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Como era de esperar, as equações de Cauchy-Riemann (equações 1) desempenham um papel central na teoria das funções de variáveis complexas. Não somente elas fornecem as condições para a função $w = f(z)$ ser analítica em z, como dão origem-a um dos resultados mais importantes da análise complexa. Se diferenciarmos a primeira das equações 1 em relação a x e a segunda

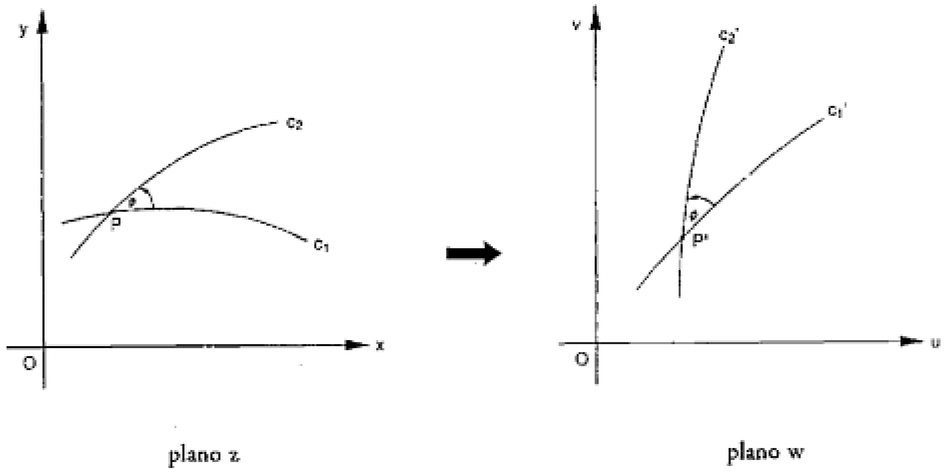


Figura 74. Conformalidade de uma função analítica: o ângulo de interseção de suas curvas é preservado na transformação.

em relação a *y,* obteremos, usando a notação de Leibniz para a segunda derivada (com ∂ substituindo o *d,* veja a pág 128),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{13}$$

Essa quantidade de ∂ pode parecer confusa, por isso vamos explicar: $\partial^2 u/\partial x^2$ é a segunda derivada de $u(x, y)$, em relação a x, enquanto $\partial/\partial x(\partial v/\partial y)$ é a segunda derivada "mista"de $v(x, y)$ em relação a y e x, *nesta ordem.* Em outras palavras, trabalhamos nesta expressão de dentro para fora, assim como fazemos com um par de parênteses entre colchetes [(…….)]. Interpretações semelhantes são válidas para as outras duas expressões. Tudo isso parece bem confuso, mas felizmente não temos que nos preocupar muito com a ordem pela qual fazemos as diferenciações: se as funções u e v forem razoavelmente "bem-comportadas" (com isso queremos dizer que elas são contínuas e possuem derivadas contínuas), a ordem das diferenciações é irrelevante. Isto é: $\partial/\partial y(\partial/\partial x) = \partial/\partial x(\partial/\partial y)$ — uma espécie de comutatividade. Por exemplo, se $u = 3x^2y^2$, então $\partial u/\partial x = 3(2x)y^3 = 6xy^3$, $\partial/\partial y(\partial u/\partial x) = 6x(3y^2) = 18xy^2$, $\partial u/\partial y = 3x^2(3y^2) = 9x^2y^2$ e $\partial/\partial x(\partial u/\partial y) = 9(2x)y^2 = 18xy^2$; daí que $\partial/\partial y(\partial u/\partial x) = \partial/\partial x(\partial u/\partial y)$. Este resultado, provado em textos sobre cálculo avançado, nos permite concluir que os lados direitos da equação 13 são iguais e opostos, e, portanto, sua soma é zero. Assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Um resultado semelhante se mantém para v (x, y). Vamos usar novamente a função $w = e^z$ como exemplo. Para a equação 2 teremos $u = e^x \cos y$, de modo que $\partial u/\partial x = e^x \cos y$, $\partial^2 u/\partial x^2 = e^x \cos y$, $\partial u/\partial y = -$ ex sen y e $\partial^2 u/\partial y^2 = - e^x \cos y$; assim $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$.

A equação 14 é conhecida como a equação de Laplace em duas dimensões, em homenagem ao grande matemático francês Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749-1827). Sua generalização a três dimensões $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0$ (onde u *é* agora uma função das três coordenadas espaciais x, y e z) *é* uma das mais importantes equações da física matemática. Falando de um modo geral, qualquer quantidade física em um estado de equilíbrio — um campo eletrostático, um fluido em movimento uniforme, ou a distribuição de temperatura em um corpo sob equilíbrio térmico, para citar apenas três exemplos — são descritos pela equação tridimensional de Laplace. Pode acontecer, entretanto, que o fenômeno considerado dependa apenas de duas coordenadas espaciais, digamos x ey, e neste caso ele será descrito pela equação 14. Por exemplo, podemos considerar um fluido em movimento uniforme, cuja velocidade u *é* sempre paralela ao plano xy e independente da coordenada z. Este movimento é, essencialmente, bidimensional. O fato de que as partes real e imaginária de uma função analítica $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfazem a equação 14 significa que podemos representar a velocidade u por uma função complexa $f(z)$, conhecida como "potencial complexo". Isso tem a vantagem de permitir que lidemos com uma única variável independente z, no lugar de duas variáveis independentes x e y, Além disso, podemos usar as propriedades das funções complexas para facilitar o tratamento matemático do fenômeno sendo estudado. Podemos, por exemplo, transformar a região do plano z, na qual o fluxo acontece, em uma região mais simples do plano w através de uma transformação conforme adequada, resolver ali o problema e então usar transformação inversa para voltar ao plano z. Esta técnica é usada rotineiramente na teoria do potencial.[9]

A teoria das funções de variável complexa foi uma das três grandes conquistas da matemática do século XIX (as outras foram a álgebra abstrata e a geometria não-euclidiana). Ela significou uma expansão do cálculo diferencial e integral até domínios que seriam inimagináveis para Newton e Leibniz. Euler, por volta de 1750, foi o precursor, Cauchy, Riemann, Weierstrass e muitos outros, no século XIX, deram-lhe o status de que desfruta hoje. (Cauchy, incidentalmente, foi o primeiro a dar uma definição precisa do conceito de limite, dispensando as noções vagas de fluxões e diferenciais.) Qual teria sido a reação de Newton e Leibniz se tivessem vivido para ver sua criação atingir a maturidade? Provavelmente teriam ficado assombrados.

NOTAS E FONTES

1. Citado em *On Mathematics and Mathematicians (Memorabilia Mathematica*), de Robert Edouard Moritz (1914, reimpressão Nova York: Dover, 1942), p. 282.
2. Para uma história dos números complexos e negativos, ver *Mathematics: The Loss of Certainty,* de Morris Kline (Nova York: Oxford University Press, 1980), pp. 114-121, e *History of Mathematics. 2* vols., de David Eugene Smith (1923; reimpressão Novaàork: Dover, 1958), 2:257-260.
3. Gauss na verdade deu quatro provas diferentes, a última em 1850. Para a segunda prova, ver *A Source Book in Mathematics*, de David Eugene Smith (1929; reimpressão Nova York, Dover, 1959), pp. 292-306.
4. O teorema *é* verdadeiro mesmo quando o polinômio tem coeficientes complexos; por exemplo, o polinômio $x^3 - 2(1+i)x^2+(1+4i)x-2i$ tem as três raizes 1, 1 e $2i$.
5. Um exemplo de função para a qual esta condição não é atendida *é* a função de valor absoluto $y =|x|$ cujo gráfico em V forma um ângulo de 45° na origem. Se tentarmos achar a derivada desta função em $x =0$, obteremos dois resultados diferentes, 1 ou – 1, dependendo de deixarmos $x \to 0$ do lado

direito ou esquerdo. A função tem uma "derivada à direita" em $x = 0$ e também uma "derivada à esquerda", mas não uma derivada única.

6. Ver qualquer livro sobre a teoria das funções de variáveis complexas.
7. Isto pode ser verificado começando com $e^w \cdot e^z$ substituindo cada fator pelo seu correspondente no lado direito da equação 2 e usando as fórmulas de adição para seno e cosseno.
8. Mais sobre o debate em relação aos logaritmos e os números imaginários pode ser encontrado em *A History of Mathematics,* de Florian Cajori (1894), 2ª edição (Nova York: Macmillan, 1919), pp. 235-237.
9. Contudo isso pode ser feito apenas em duas dimensões. Em três dimensões outros métodos devem ser usados — por exemplo, o cálculo vetoriai. Ver *Advanced Engineering Mathematics,* de Erwin Kreyszig (Nova York: JohnWiley, 1979), pp-551-558 e Cap. 18.

Uma descoberta notável

Um *número primo é* um inteiro maior do que 1 que só é divisível, por si mesmo ou por um. Os primeiros dez números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29. Um inteiro positivo > 1 que não é primo é chamado de *múltiplo.* (O número 1 é considerado como não sendo nem primo nem múltiplo.) A importância dos números primos na teoria dos números — e em toda a matemática — se deve ao fato de que todo inteiro > 1 pode ser fatorado (isto é, escrito como um produto) de números primos de maneira única. Por exemplo, o número múltiplo 12 pode ser fatorado em 2 e 6 ($12 = 2 \times 6$), mas $6 = 2 \times 3$, e assim temos $12 = 2 \times 2 \times 3$. Poderíamos ter começado de um modo diferente, digamos $12 = 3 \times 4$; mas então $4 = 2 \times 2$, de modo que teríamos $12 = 3 \times 2 \times 2$ como antes (exceto pela ordem dos fatores). Este fato importante é conhecido como *Teorema Fundamental da Aritmética.*

Uma das poucas coisas que sabemos sobre os primos é que existe um número infinito deles. Isto é, a lista de números primos nunca termina. Este fato encontra-se demonstrado no Livro IX dos *Elementos* de Euclides. O menor dos números primos é 2 — e também o único número primo par. O maior, quando este livro foi impresso, era $2^{2.976.221} - 1$, um número com 895-932 dígitos, descoberto por Gordon Spence em dezembro de 1997 num microcomputador usando um programa da internet. Se fosse impresso, encheria um livro de 450 páginas.[1] A descoberta de um novo número primo costumava ser celebrada com uma garrafa de champanhe ou com um selo postal (fig. 75); hoje em dia é alardeada por fabricantes de computadores e companhias de software que esperam aumentar suas rendas. Isto porque os primos, outrora um assunto da matemática pura, recentemente encontraram uma utilidade inesperada em questões de segurança nacional. A dificuldade em se fatorar o produto de dois números primos bem grandes, se esses números forem desconhecidos pelo usuário, é a base da *criptografia de chave pública.*

Figura 75. Carimbo poscal marcando a descoberta de um novo número primo.

Muitas questões sobre os números primos permanecem sem resposta, daí a aura de mistério que os cerca. Por exemplo, os primos têm a propensão de se arrumarem em pares da forma p, $p+2$; alguns exemplos sendo 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 101 e 103. Encontramos esses pares mesmo entre os números maiores: 29.879 e 29.881, 140.737.488.353.699 e 140.737.488.353.701. O maior par conhecido em 1990 era $1.706.595 \times 2^{11235} \pm 1$, cada um deles tendo 3.389 dígitos.[2] Não se sabe se existe um número infinito desses “primos gêmeos”, a maioria dos matemáticos acredita que sim, mas ninguém conseguiu provar ainda esta conjectura.

Outra questão insolúvel, envolvendo primos, é a Conjectura de Goldbach, que recebeu este nome de Chrisrian Goldbach (1690-1764), um matemático alemão que mais tarde tornou-se ministro do Exterior da Rússia. Em uma carta para Euler (1742) ele conjecturou que cada número par > 4 seria a soma de dois números primos; por exemplo, 4 =2+2, 6 =3+3, 8 =3+5, 10 =5+5 =3+7 e l 2 =5+7. (A suposição não funciona com números ímpares: 11 não é a soma de dois primos, como o leitor pode constatar facilmente.) Até onde sabemos, Euler não provou sua estimativa, mas nem ele, nem mais ninguém encontrou um exemplo contrário. A conjectura já foi testada para todos os números, até pelo menos 10^{10}, e se descobriu que é correta, mas isto, é claro, não é garantia de que seja verdadeira para *todos* os números pares. Ela permanece como um dos grandes problemas sem solução da matemática.[3]

Um dos aspectos mais intrigantes dos números primos *é* que eles parecem espalhar-se ao acaso entre os inteiros, sem nenhum padrão aparente que governe sua distribuição. De fatos todas as tentativas para encontrar uma fórmula que produza apenas primos — ou prever sua distribuição exata — falharam até agora. Um grande avanço, entretanto, foi conseguido quando os matemáticos desviaram sua atenção dos primos individuais para uma distribuição *média.* Em 1792, aos 15 anos de idade, Carl Friedrich Gauss examinou uma tabela de números primos compilada pelo matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Gauss queria encontrar a regra que governa o número de primos abaixo de um dado inteiro *x;* mais precisamente, o número de primos $\leq x$. Hoje indicamos este número pela letra π e, como se trata de uma função de *x,* escrevemos $\pi(x)$ (a letra π aqui não tem relação alguma com o número π =3,14 …). Por exemplo, como existem cinco primos menores do que 12 (ou seja, 2, 3, 5, 7 e 11), teremos $\pi(12)$ =5. De modo semelhante *7t{*13) =6, já que o próprio 13 é primo.

Note que o valor de $\pi(x)$ não muda até que *x* chegue ao próximo número primo, *assim* $\pi(14)$ ainda é 6, e também $\pi(15)$ e $\pi(16)$. Portanto, $\pi(x)$ aumenta em saltos de 1, mas o intervalo entre esses saltos é irregular. Entretanto, mesmo uma olhada rápida nos inteiros mostra que, *em média*, esses intervalos tornam-se cada vez maiores, isto é, a chance de que um inteiro escolhido ao acaso seja primo torna-se menor, em média, à medida que avançamos para os números maiores. O próprio Gauss se perguntou se para um valor grande de *x* o comportamento de $\pi(x)$ não poderia ser aproximado por alguma função conhecida. Depois de examinar cuidadosamente a tabela de Lambert ele fez uma suposição ousada: para um valor elevado de *x,* $\pi(x) \sim x/\ln x$, onde ln *x é* o logaritmo natural (logaritmo na base *e)* de *x.* O símbolo~significa que a proporção entre $\pi(x)$ e $x/\ln x$ tende para 1 à proporção que *x* tende a infinito. Em símbolos escrevemos $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/(x/\ln x) = 1$.[4] Esta famosa expressão ficou conhecida como *Teorema dos Números Primos.*

Se escrevermos o Teorema dos Números Primos na forma equivalente $\pi(x)/x \sim 1/\ln x$, podemos interpretá-lo como dizendo que a *densidade média* de números primos — isto é, a probabilidade de que um dado inteiro seja primo — aproxima-se de $1/\ln x$ à medida que *x* aumenta sem limites. A tabela a seguir compara as proporções $\pi(x)/x$ e $1/\ln x$ (arredondado até quatro casas decimais) para valores cada vez maiores de *x*:

x	$\pi(x)$	$\pi(x)/x$	$1/\ln x$
10	4	0,4000	0,4343
100	25	0,2500	0,2171
1.000	168	0,1680	0,1448
10.000	1.229	0,1229	0,1086
100.000	9.592	0,0959	0,0869
1.000.000	78.498	0,0785	0,0724
10.000.000	664.579	0,0665	0,0620
100.000.000	5.761.455	0,0576	0,0543

O jovem Gauss registrou essa conjectura no verso de sua tabela de logaritmos. Lá encontramos a declaração

Primzahlen unter a $(=\infty)$ $a/1a$

Ele não tentou provar a sua conjectura; e a prova frustrou muitas grande mentes, incluindo a do matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) — ele mesmo um aluno de Gauss — que publicou um trabalho importante sobre o assunto em 1859. O sucesso foi obtido finalmente em 1896, quando Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), da França, e Charles de la Vallée-Poussin (1866-1962) da Bélgica, demonstraram, independentemente, a conjectura de Gauss.

A presença do logaritmo natural na Teoria dos Números Primos mostra que o número *e* está ligado, indiretamente, aos números primos. E que tal associação possa ocorrer é notável: os primos pertencem ao domínio dos inteiros, a quintessência da matemática discreta, enquanto *e* pertence ao reino da análise, ao domínio dos limites e da continuidade.[5] Vejamos a seguinte citação da Richard Courant e Herbert Robbins em *What is Mathematics*.[6]

> Que a distribuição média de números primos possa ser descrita pela função logarítmica constitui uma descoberta notável, pois *é* surpreendente que dois conceitos matemáticos que parecem táo distantes um do outro estejam de feto ligados de modo tão íntimo.

NOTAS E FONTES

1. *Focus* (boletim daAssociação Americana de Matemática), dezembro de 1997, p. 1.
2. David M. Burton, *Elementary Number Theory* (Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown, 1994), p. 53.
3. Para saber mais sobre a história da Conjectura de Goldbach, ver Durton, pp. 5256, 124.
4. Dizemos que $\pi(x)/x$ se aproxima de $1/\ln x$ *assintoticamente.*
5. Uma ligação semelhante existe entre os inteiros e o número π =3,14…, como, por exemplo, no produto de Wallis (ver p. 74).
6. Londres: Oxford University Press, 1941.

15

Mas que tipo de número é esse?

O número governa o universo.
– LEMA DOS PITAGÓRICOS

A história de π recua até uma época ancestral, já a história de ***e*** cobre apenas quatro séculos. O número π originou-se de um problema de geometria: como encontrar a circunferência e a área de um círculo. As origens de *e* não são tão claras, elas parecem recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $(1+1/n)^n$, que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia a um certo limite — cerca de 2,71828 — à medida que n aumenta. Assim *e* tornou-se o primeiro número a ser *definido* por um processo de limite, $e = \lim (1+1/n)^n$ conforme $n \to \infty$. Durante algum tempo o novo número foi considerado uma curiosidade; então, a bem-sucedida quadratura da hipérbole por Saint-Vincent colocou a função logarítmica e o número *e* na vanguarda da matemática. O passo crucial foi dado com a invenção do cálculo, quando se percebeu que o inverso da função logarítmica — que depois seria denotado como e^x — era igual à sua própria derivada. Isto, imediatamente, deu ao número *e* e à função e^x um papel central na análise. Então, por volta de 1750, Euler permitiu que a variável ***x*** assumisse valores imaginários e até mesmo complexos, abrindo o caminho para a teoria das funções de variáveis complexas, com suas notáveis propriedades. Uma questão entretanto ainda permanecia sem resposta: exatamente que tipo de número é o *e*?

Desde a aurora da história escrita os seres humanos têm necessitado lidar com números. Para os antigos, e para algumas tribos ainda hoje — números referem-se aos números naturais. De fato, quando se torna necessário enumerar aquilo que possuímos, os números naturais (também conhecidos como *inteiros positivos)* são suficientes. Cedo ou tarde, porém, devemos lidar com medições — encontrar a área de um terreno, o volume de um recipiente de vinho, a distância entre duas cidades. E é altamente improvável que tais medidas resultem em valores exatos de unidades. Daí surge a necessidade de frações.

As frações já eram conhecidas pelos egípcios e babilônios, que criaram meios engenhosos de registrá-las e de fazer cálculos com elas. Mas foram os gregos, influenciados pelos ensinamentos de Pitágoras, que fizeram das frações o centro de seu sistema matemático e filosófico, elevando-as a uma condição quase mítica. Os pitagóricos acreditavam que tudo no mundo — da física e da cosmologia até a arte e a arquitetura — podia ser expresso em termos de frações, isto é, números racionais. Esta crença provavelmente originou-se do interesse de Pitágoras pelas leis da harmonia musical. Diz-se que ele teria feito experiências com vários objetos produtores de sons — cordas, sinos e copos cheios de água — e descobriu uma relação quantitativa entre o comprimento de uma corda vibrando e a tonalidade do som que ela produz: quanto mais curta for a corda, mais alta será a tonalidade. Além disso, observou que os intervalos musicais comuns (as distâncias entre as notas na escala musical) correspondiam a *proporções* simples dos comprimentos das cordas. Por exemplo, uma oitava eqüivalia a uma proporção no comprimento de 2:1, uma quinta a uma proporção de 3:2, uma quarta 4:3, e assim por diante (os termos *oitava, quinta* e *quarta* referem-se às posições desses intervalos na escala musical (como podemos ver na pág. 169). Foi com base nessas proporções — os três "intervalos perfeitos" — que Pitágoras criou sua famosa escala musical. Mas ele foi ainda mais longe e interpretou sua descoberta como significando que não apenas a harmonia musical era governada por proporções simples de números inteiros, mas o mesmo acontecia com todo o universo. Esse extraordinário salto de lógica só pode ser entendido se lembrarmos que, na filosofia grega, a música — e mais precisamente, a *teoria* da música (em oposição a sua mera execução) — tinha uma importância igual à das ciências naturais, particularmente a matemática. Assim, Pitágoras raciocinou que se a músíca era baseada em números racionais, certamente o mesmo deveria acontecer com o universo inteiro. E os números racionais passaram a dominar a visão grega do mundo, exatamente como o pensamento racional dominou sua filosofia (de fato, a palavra grega para racional é *logos,* da qual deriva o termo moderno, *lógica*.)

Bem pouco se sabe sobre a vida de Pitágoras. Tudo o que sabemos vem de trabalhos escritos vários séculos depois da sua morte, onde se faz referência às suas descobertas. Portanto, quase tudo o que se diz sobre ele, deve ser recebido com uma boa dose de ceticismo.[1] Pitágoras nasceu em torno do ano 570 a.C, na ilha de Samos, no mar Egeu. Não muito longe de Samos fica a cidade de Mileto, no continente da Ásia Menor, onde vivia Tales, o primeiro dos grandes filósofos gregos. Assim é bem possível que o jovem Pitágoras — cinqüenta anos mais moço do que Tales — tenha ido a Mileto estudar com o grande sábio. Depois ele viajou pelo mundo antigo e, finalmente, estabeleceu-se na cidade de Crotona, no atual sul da Itália. Lá ele fundou sua famosa escola de filosofia. A escola pitagórica era mais do que apenas um fórum para discussões filosóficas; ela era uma ordem mística cujos membros ficavam submetidos a leis estritas de sigilo. Os pitagóricos não mantinham registros escritos de seus debates. Mas o que discutiam teve influência enorme no pensamento científico europeu, uma influência que se prolongou até a Renascença. Um dos últimos pitagóricos foi o grande astrônomo Johannes Kepler (1571-1630), cuja crença apaixonada no domínio dos números racionais o levou a se afastar, por mais de trinta anos, do caminho certo na sua busca pelas leis do movimento planetário.

É claro que não são apenas os argumentos filosóficos que colocam os números racionais tão no centro da matemática. Uma propriedade que distingue esses números dos inteiros é que os racionais formam um conjunto *denso* de números. Com isso queremos dizer que entre duas frações, não importa o quão próximas uma da outra, podemos sempre espremer uma terceira. Pegue as frações 1/1.001 e 1/1.000, por exemplo. Essas duas frações certamente estão muito próximas, a diferença entre elas sendo de um milésimo. E no entanto podemos achar facilmente uma fração que se encaixa entre elas, digamos 2/2.001. E em seguida podemos repetir o processo e achar a fração entre 2/2.001 e 1/1.000 (por exemplo, 4/4.001), e assim por diante, até o infinito. Não apenas existe espaço para outra fração, entre quaisquer duas frações determinadas, como existe espaço para um número *infinito* de novas frações. Conseqüentemente, podemos expressar o resultado de qualquer medição apenas em termos de números racionais. Isso acontece porque o rigor de qualquer medida *é* inerentemente limitado pelo rigor do nosso aparelho de medição. Só podemos conseguir um número aproximado, para o qual os números racionais são totalmente suficientes.

A palavra *densa* reflete com precisão o modo como os racionais se distribuem ao longo da linha dos números. Pegue qualquer segmento de reta e, não importa o quão pequeno ele seja, estará sempre povoado por um número infinito de "pontos racionais" (isto é, pontos cuja distância da origem pode ser dada por números racionais). Assim, parece natural concluir — como os gregos fizeram — que toda a linha dos números é povoada por pontos racionais. Mas na matemática o que *parece* ser uma conclusão natural muitas vezes se revela falsa. Um dos momentos mais importantes da história da matemática foi a descoberta de que os números racionais, apesar de sua densidade, deixam "buracos" ao longo da linha dos números — pontos que não correspondem a nenhum número racional.

A descoberta desses buracos é atribuída a Pitágoras, embora possa ter sido feita por um de seus discípulos. Nunca saberemos, já que, em respeito ao seu grande mestre, os pitagóricos davam-lhe o crédito por todas as suas descobertas. A descoberta envolveu a diagonal de um quadrado unitário (um quadrado cujo lado é igual a 1). Chamando o comprimento da diagonal de *x,* pelo Teorema de Pitágoras teremos $x^2 =1^2+1^2 =2$, de modo que x é a raiz quadrada de 2, que escrevemos $\sqrt{2}$. pitagóricos, é claro, presumiram que este número era igual a alguma fração e tentaram pertinazmente encontrá-lo. Certo dia, porém, um deles fez a espantosa descoberta de que $\sqrt{2}$ não podia ser igual a uma fração. E assim foi descoberta a existência dos *números irracionais.*

Muito provavelmente os gregos usaram um argumento geométrico para demonstrar que *d2 é* irracional. Hoje em dia conhecemos várias provas da irracionalidade da *SI,* todas elas "indiretas". Começamos presumindo que $\sqrt{2}$ é uma proporção entre doís inteiros, digamos m/n, e então demonstramos que essa suposição leva a uma contradição e portanto $\sqrt{2}$ não pode ser igual à proporção suposta. Presumimos que m/n se encontre em sua forma mais reduzida (isto é, *m* e *n* não possuem fatores comuns). Aí as várias provas seguem caminhos diferentes. Podemos, por exemplo, elevar ao quadrado a equação $\sqrt{2} =m/n$ e então obter $2 =m^2/n^2$, daí que $m^2 =2n^2$. Isso significa que m^2, e portanto o próprio *m, é* um inteiro par (porque o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar). Portanto $m =2r$, para algum inteiro *r.* Aí teremos $(2r)^2 = 2n^2$, ou, depois de simplificar, $n^2 = 2r^2$. Mas isto significa que n também é par, de modo que $n = 2s$. Deste modo ambos, m e n são inteiros pares e possuem, portanto, o fator comum 2, contrário à nossa suposição de que a fração m/n esteja em sua forma mais reduzida. Daí que $\sqrt{2}$ não pode ser uma fração.

A descoberta de que $\sqrt{2}$ é irracional deixou os pitagóricos num estado de choque, pois lá estava uma quantidade que podia claramente ser medida e até mesmo construída com esquadro e compasso, e no entanto não se tratava de um número racional. Tão grande foi sua perplexidade que eles se recusaram a pensar em $\sqrt{2}$ como um número; de fato passaram a considerar a diagonal de um quadrado como uma magnitude imensurável! (Esta distinção entre número aritmético e magnitude geométrica, que de fato era uma contradição à doutrina pitagórica de que o número governa o universo, tornar-se-ia um elemento essencial da matemática grega.) Fiéis ao seu juramento de segredo, os pitagóricos se comprometeram a manter a descoberta entre eles. Diz a lenda que um homem chamado Hipaso resolveu seguir um caminho diferente e revelar ao mundo a existência dos números irracionais. Alarmados com esta quebra da lealdade, seus companheiros conspiraram para atirá-lo ao mar, pela amurada do navio em que velejavam.

Entretanto, o conhecimento da descoberta espalhou-se e logo outros números irracionais foram encontrados. Por exemplo, a raiz quadrada de todo número primo é irracional, assim como as raízes quadradas da maioria dos números compostos. Na época em que Euclides escreveu seus *Elementos*, no século III a. C., os números irracionais já tinham deixado de ser novidade. O Livro X dos *Elementos* apresenta uma ampla teoria geométrica dos irracionais, ou *incomensuráveis,* como eram chamados — segmentos de reta com nenhuma medida comum. (Se os segmentos AB e CD tivessem uma medida comum, seus comprimentos seriam múltiplos exatos de um terceiro segmento PQ. E assim teríamos $AB = mPQ$, $CD = nPQ$, para algum inteiro m e n. Daí $AB/CD = (mPQ)/(nPQ) = m/n$, um número racional.) Entretanto, uma teoria inteiramente satisfatória dos irracionais — destituída de considerações geométricas — só apareceu em 1872, quando Richard Dedekind (1831-1916) publicou seu famoso ensaio *Continuidade e números irracionais*.

Juntando o conjunto dos números racionais com o dos irracionais obtemos o conjunto maior dos *números reais.* Um número real é qualquer número que pode ser escrito em forma decimal. Os decimais são de três tipos: os que terminam, como 1,4; os que não acabam nunca e se repetem, como 0,2727 … (também escrito como 0,27); e aqueles que não terminam nem se repetem, como é o caso de 0,1010010001 …, onde os dígitos nunca seguem exatamente a mesma ordem. Sabe-se bem que os decimais dos primeiros dois tipos sempre representam números racionais (nos exemplos dados, 1,4 =7/5 e 0,2727 … =3/11), enquanto os decimais do terceiro tipo representam os números irracionais.

A representação decimal dos números reais confirma imediatamente aquilo que já dissemos: de um ponto de vista prático — para propósitos de medições — nós não precisamos de números irracionais. Pois sempre poderemos aproximar ó número irracional através de uma série de *aproximações racionais,* cuja precisão pode ser tão boa quanto desejarmos. Por exemplo, a seqüência de números racionais 1, 1,4 (=7/5); 1,41 (=141/100); 1,414 (=707/500), e 1,4142 (=7.071/5.000) são todos aproximações racionais de $\sqrt{2}$, aumentando progressivamente em precisão. É o aspecto *teórico* dos números irracionais que os tornam tão importantes para a matemática: eles são necessários para preencher os "buracos" deixados na linha dos números pela existência de pontos não racionais; e fazem do conjunto de números reais um sistema completo, um *continuum numérico.*

O assunto ficou nesse pé pelos próximos dois e meio milênios. Então, por volta de 1850, foi descoberto um novo tipo de número. A maioria dos números que encontramos na álgebra elementar podem ser imaginados como soluções para equações simples; mais especificamente eles são soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Por exemplo, os números –1, 2/3 e $\sqrt{2}$ são soluções das equações polinomiais $x+1=0$, $3x-2=0$ e $x^2-2=0$, respectivamente. (O número $i=\sqrt{-1}$ também pertence a este grupo, visto que ele satisfaz a equação $x^2+1=0$; entretanto, aqui vamos restringir nossa discussão aos números reais.) Até mesmo um número de aparência complicada como $\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})}$ pertence a esta classe, já que ele satisfaz a equação $x^6-2x^3-1=0$, como se pode constatar facilmente. Um número real que satisfaz (é uma solução de) uma equação polinomial com coeficientes inteiros é chamado *algébrico.*

Claramente todo número racional a/b *é* algébrico, já que ele satisfaz a equação $bx - a = 0$. Assim, se um número *não* for algébrico, deve ser irracional. O inverso, contudo, não é verdadeiro; um número irracional pode ser algébrico, como mostra o exemplo de $\sqrt{2}$. Surge agora a questão: existirão números irracionais *não algébricos*? Por volta do início do século XIX os matemáticos começaram a suspeitar de que a resposta era sim, mas nenhum número desse tipo tinba sido encontrado. Parecia que um número não algébrico, se fosse descoberto, seria uma singularidade.

Foi em 1844 que o matemático francês Joseph Liouville (1809-1882) provou que os números não algébricos de fato existiam. Sua prova, embora não fosse simples,[2] permitiu que ele produzisse vários exemplos de tais números. Um dos exemplos, conhecido como número de Liouville, é

$$\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \ldots,$$

cuja expansão decimal é 0,11000100000000000000000100 … (os blocos cada vez maiores de zeros são devidos à presença de «! no expoente de cada denominador do número de Liouville, o que faz com que os termos diminuam de um modo extremamente rápido. Outro exemplo é 0,12345678910111213 …, onde os dígitos são os números naturais em ordem. Um número real não algébrico é chamado de *transcendental*. Não há nada de místico nessa palavra, ela indica meramente que esses números transcendem (vão além) do reino dos números algébricos.

Em contraste com os números irracionais, cuja descoberta surgiu de um problema comum na geometria, os primeiros números transcendentais foram criados, especificamente, com o propósito de demonstrar que tais números existiam. De certo modo, eram números “artificiais”. Mas, uma vez este objetivo alcançado, a atenção voltou-se para alguns números mais comuns, particularmente π e e. Que esses números eram *irracionais* já se sabia há mais de um século: Euler, em 1737, provara a irracionalidade de ambos e e e^2.[3] E Johann Heinrich Lambert (1728-1777), um matemático suíço-alemão, em 1768[4] provou que o mesmo acontecia com π. Lambert mostrou que as funções e^x e tan x (a proporção sen $x/\cos x$) não podem assumir valores racionais se x for um número racional que não o 0.[5] Contudo, como tan $\pi/4$

=tan 45° =1, que é um número racional, segue-se que π/4 e, portanto, π devem ser irracionais. Lambert suspeitava de que π e *e* eram transcendentais, mas não podia provar.

Daí em diante as histórias de π e *e* se entrelaçam. O próprio Liouville provou que *e* não pode ser a solução de uma equação *quadrática* com coeficientes inteiros. Mas isto, por certo, ainda não ***é*** suficiente para provar que *e* é transcendental — ou seja, provar que ele nao é solução de *nenhuma* equação polinomial com coeficientes inteiros. Esta tarefa foi deixada para outro matemático francês, Charles Hermite (1822-1901).

Hermite nasceu com um defeito na perna, uma deficiência que se revelou vantajosa ao torná-lo inadequado para o serviço militar. Embora seu desempenho como estudante na prestigiada École Polytechnique não fosse brilhante, ele logo se revelou um dos matemáticos mais originais da segunda metade do século XIX. Seu trabalho cobre um grande número de áreas, incluindo a teoria dos números, álgebra e análise (sua especialidade eram as funções elípticas, um tópico da análise superior) e sua visão ampla permitiu que ele encontrasse muitas ligações entre esses campos aparentemente distintos. Além de realizar pesquisas, Hermite escreveu vários livros-texto de matemática que se tornaram clássicos. Sua famosa prova da transcendência de *e* foi publicada em 1873 em um ensaio de mais de trinta páginas. Nela, Hermite fornece duas provas distintas, das quais a segunda é a mais rigorosa.[6] E como uma seqüência à sua prova, Hermite deu a seguinte aproximação racional para *e* e e^2.

$$e \approx \frac{58{,}291}{21{,}444}, \quad e^2 \approx \frac{158{,}452}{21{,}444}.$$

A primeira tem um valor decimal 2,718289498, um erro de menos de 0,0003 por cento do valor verdadeiro.

Tendo estabelecido a condição de z, poderíamos esperar que Hermite devotasse todos os seus esforços para fazer a mesma coisa em relação ao π. Mas, em uma carta para um ex-aluno ele escreveu: "Eu não me arriscarei a provar a transcendência de π. Se outros tentarem, ninguém ficará mais feliz do que eu com o seu sucesso. Mas, acredite-me, vai custar a eles algum esforço."[7] Claramente, ele esperava que a tarefa fosse formidável. Mas em

1882, apenas nove anos depois da demonstração de Hermite para a transcendência de *e*, os esforços do matemático alemão Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852-1939) foram recompensados. Lindemann modelou sua demonstração de acordo com a de Hermite; e mostrou que uma expressão da forma

$$A_1e^{a_1} + A_2e^{a_2} + \dots + A_ne^{a_n},$$

onde os a_i*'s* são números algébricos distintos (reais ou complexos) e os A_i*'s* são números algébricos, nunca pode ser igual a 0 (excluímos aqui o caso trivial onde todos os A_i' são 0).[8] Mas nós conhecemos uma expressão desse dpo que é igual a 0: a Fórmula de Euler $e^{\pi i}+1 = 0$ (note que o lado esquerdo pode ser escrito como $e^{\pi i}+e^0$, que tem a forma necessária). Portanto πi, e daí π, não pode ser algébrico: π é transcendental.

Com essas descobertas, a longa busca sobre a natureza das proporções do círculo chegou ao fim. A transcendência de π acabou de uma vez com o velho problema de construir, usando compasso e esquadro, um quadrado com uma área igual à do círculo, Este problema tinha obcecado matemáticos desde que Platão, no século III a.C, determinara que todas as construções geométricas deveriam ser feitas apenas com um compasso e um esquadro (uma régua sem escala marcada). Sabe-se muito bem que esse tipo de construção só pode ser realizado se os comprimentos de todos os segmentos de reta envolvidos satisfizerem um certo tipo de equação polinomial com coeficientes inteiros,[9] A área do círculo de raio unitário é π; assim, se esta área for igual à área de um quadrado de lado x, teremos $x^2 = \pi$ e daí $x = \sqrt{\pi}$. Mas para construir um segmento com esse comprimento, $\sqrt{\pi}$ — e, portanto, π —, devem satisfazer uma equação polinomial de coeficientes inteiros, tornando-o um número algébrico. E como π não é algébrico, tal construção é impossível.

A solução do mistério, que intrigara os matemáticos desde a antiguidade, fez de Lindemann um homem famoso. E no entanto foi a prova de Hermite, para a transcendência de *e,* que abriu o caminho para a prova de Lindemann. Ao comparar as contribuições dos dois matemáticos, o *Dictionary of Scientific Biography* diz o seguinte: "Assim Lindemann, um matemático medíocre, ficou mais famoso do que Hermite, por uma descoberta para a qual Hermite fizera todo o trabalho preliminar e estivera a um passo de realizar."[10] Mais tarde Lindemann tentou resolver outro problema famoso, o Ultimo Teorema de Fermat, mas descobriu-se que sua demonstração tinha um erro grave logo no início.[11]

Num certo sentido as histórias de π e de e são diferentes. Devido à história mais longa e à fama maior de π, o impulso para calculá-lo com um número cada vez maior de dígitos acabou se tornando uma corrida ao longo dos anos. Nem mesmo a prova de Lindemann, de que π é transcendental, impediu os caçadores de dígitos de realizarem trabalhos cada vez mais espetaculares (o recorde, em 1989, estava em 480 milhões de casas decimais). Nenhuma loucura desse tipo acontece com o e.[12] E nem o e tem gerado tanta curiosidade quanto o π,[13] embora eu tenha encontrado a seguinte nota de pé de página num livro recente de física: "Para aqueles familiarizados com a história americana, os primeiros nove digitos [de *e*], depois do ponto decimal, podem ser lembrados como e =2,7 (Andrew Jackson)^2, ou e =2,718281828 …, porque Andrew Jackson foi eleito presidente dos Estados Unidos em 1828. E para aqueles que forem bons em matemática, esta é uma excelente maneira de lembrar a história americana".[14]

Estabelecida a natureza dos dois mais famosos números da matemática, parecia que a atenção dos matemáticos se voltaria para outras áreas. Mas no Segundo Congresso Internacional de Matemática, realizado em Paris, em 1900, um dos maiores matemáticos da época, David Hilbert (1862-1943) desafiou a comunidade matemática com uma lista de vinte e três problemas não resolvidos, cuja solução ele considerava da maior importância, O sétimo problema da lista de Hilbert era provar ou negar a hipótese de que, para qualquer número algébrico $a \neq 0$, 1 e para qualquer número algébrico irracional b, a expressão a^b é sempre transcendental. Como exemplo específico ele deu os números $2^{\sqrt{2}}$ e e^{π} (este último porque pode ser escrito na forma i^{-2i} [ver pág. 230] e assim tem a forma exigida).[15] Hilbert previu que esse problema levaria mais tempo para ser resolvido do que o Ültimo Teorema de Fermat, mas foi excessivamente pessimista. Em 1929 o matemático russo Alexandr Osipovich Gelfond (1906-1968) provou a transcendência do *e",* e no ano seguinte houve a prova para $2^{\sqrt{2}}$. A hipótese geral de Hilbert em relação a a^b foi demonstrada em 1934 por Gelfond, e também, independentemente, por T. Schneider na Alemanha.

Não é fácil provar que um número específico é transcendental: é preciso provar que o número *não* preenche cercas exigências. Entre os números cuja condição ainda não foi estabelecida temos π^e, π^π e e^e. O caso de π^e é particularmente interessante porque lembra a simetria incompleta que existe entre π e *e*. Como vimos no Capítulo 10, *e* desempenha um papel em relação à hipérbole, semelhante ao de π em relação ao círculo. Mas esta semelhança não é perfeita, como mostra claramente a fórmula de Euler $e^{\pi i} = -1$ (π e *e* ocupam nela posições diferentes). Os dois números mais famosos, apesar de sua associação íntima, possuem personalidades bem diferentes.

A descoberta dos números transcendentais não provocou o mesmo choque intelectual que os números irracionais tinham causado, dois mil e quinhentos anos antes, mas suas conseqüências foram igualmente significativas. Ela mostrou que, por trás da aparente simplicidade do sistema de números reais, ocultam-se muitas sutilezas, sutilezas que não podem ser notadas simplesmente olhando-se a expansão decimal de um número. Mas a maior surpresa ainda estava por vir. Em 1874 o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) fez a espantosa descoberta de que existem mais números irracionais do que racionais, e mais números transcendentais do que algébricos. Em outras palavras, longe de serem excentricidades, *â maioria* dos números reais é irracional e, entre os números irracionais, a maioria é transcendental![16]

E isto nos leva a campos ainda mais elevados de abstração. Se nos contentarmos em apenas calcular os valores de π^e e e^π, descobriremos que eles são surpreendentemente próximos: 22,459157 … e 23,140692 …, respectivamente. É claro que π e *e* não estão demasiado separados numericamente. Pense nisso: entre a infinidade de números reais, aqueles que são mais importantes para a matemática – 0, 1, $\sqrt{2}$, *e* e π — estão localizados dentro de menos de quatro unidades na linha numérica. Uma coincidência extraordinária? Um mero detalhe do grande projeto do Criador? Eu deixo para o leitor decidir.

NOTAS E FONTES

1. Ver *Science Awakening: Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics,* de B. L. van derWaerden, tradução de Arnold Dresden (Nova York: John Wiley, 1963), pp. 92-102.
2. Ver, por exemplo, *Calculas with Analytic Geometry,* de George F. Simmons (Nova York: McGraw-Hill, 1985), pp. 734-739.
3. A prova da irracionalidade de *e* é dada no Apêndice 2.
4. Lambert recebe freqüentemente o crédito pela introdução das funções hiperbólicas na matemática, mas Vincenzo Riccati parece tê-lo precedido (ver a pág. 188).
5. Como resultado, a curva exponencial $y = e^x$ não passa por nenhum ponto algébrico no plano, exceto o ponto (0,1). (Um ponto algébrico cujas coordenadas x e y são ambas números algébricos.) Citando Heinrich Dorrie: "E como os pontos algébricos estão onipresentes em quantidades densamente concentradas dentro do plano, a curva exponencial realiza a difícil façanha de serpentear entre todos esses pontos sem tocar em qualquer um deles. O mesmo, naturalmente, acontece com a curva logarítmica $y = \ln x$" (*100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution,* Dorrie, tradução de David Antin [1958; reimpressão Nova York: Dover, 1965], p. 136).
6. Ver *A Source Book in Mathematics,* de David Eugene Smith (1929; reimpressão Nova York: Dover, 1959), pp. 99-106. Para a versão simplificada da prova de Hermite, ver *Calculus with Analytic Geometry,* de Simmons, pp. 737-739.
7. Citado em *Calculus with Analytic Geometry,* de Simmons, p. 843.
8. Para uma versão simplificada da prova de Lindemann, ver *100 Great Problems,* de Dorrie, pp. 128-137.
9. Ver *What Is Mathematics?,* de Richard Courant e Herbert Robbins (1941; reimpressão Londres: Oxford University Press, 1941), pp. 127-140
10. C.C. Gillispie, editor (Nova York: Charles Scribners Sons, 1972),
11. Para a recente demonstração do Ultimo Teorema de Fermat, ver Capítulo 7, nota 1.

12. O pôster *Computer e,* de David Slowinski e William Christi (Paio Alto, Califórnia: Creative Publications, 1981), mostra *e* até 4.030 casas decimais. Um segundo pôster, *Computer* π*,* por Stephen J. Rogowski e Dan Pasco (1979), dá π com 8.182 casas decimais.
13. Ver, por exemplo, An *Introduction to the History of Mathematics,* de Howard Eves (1964; reedição da Philadelphia Saunders College Publishing, 1983), pp. 89 e 97.
14. Conversations *on the Dark Secrets of Physics,* de Edward Teller, Wendy Teller e Wilson Talley (Nova York e Londres: Plenum Press, 1991), p. 87.
15. *Classics of Matbematics,* de Ronald Calinger (Oak Park, 111.: Moore Publishing Company, 1982), pp. 653-677.0 sétimo problema de Hilbert está em op. cit., p. 667.
16. Um relato do trabalho de Cantor pode ser encontrado em meu livro, *To Infinity and Beyond;A Cultural History of the Infinite* (1987; reedição Princeton: Princeton University Press, 1991), Capítulos 9 e 10.

Apêndices

A letra e *não pode mais ser usada para denotar outra coisa além desta constante universal positiva* [a solução da equação $\ln x = 1$].

– Edmund Landau, *Differential and Integral Calculus* (1934)

Apêndice 1

Algumas observações adicionais sobre os logaritmos de Napier

Em seu livro *Mirifici logarithmorum canonis constructio,* publicado postumamente em 1619, Napier explicou sua invenção dos logaritmos em termos de um modelo geométrico-mecânico, o que era uma abordagem comum para resolver problemas matemáticos naquela época (lembre-se de que Newton usou um modelo semelhante para descrever sua idéia de fluxões). Considere um segmento de reta *AB* e um raio infinito, paralelo a *AB* e se estendendo a partir de *C*, para a direita (fig. 76).

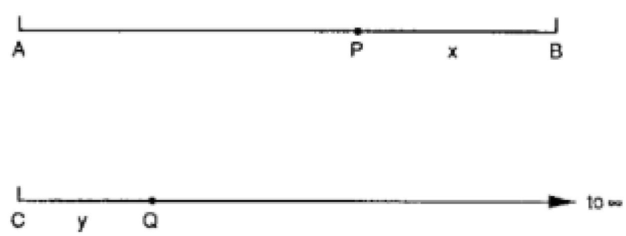


Figura 76. Napier usou um modelo geométrico para explicar sua idéia dos logaritmos: *P* move-se ao longo de *AB* com uma velocidade proporcional à distância *PB,* enquanto *Q* move-se ao longo de *CD* com uma velocidade constante igual à velocidade iniciai de *P.* Se fizermos *x* =*PB* e *y* =*CQ,* então *y* é o logaritmo (neperiano) de *x*.

Um ponto *P* começa a se mover de *A* em direção a *B,* com uma velocidade que é proporcional, a cada instante, à distância de *P* a *B.* No mesmo instante em que *P* inicia seu movimento, um ponto *Q* começa a se mover de *C* para a direita com uma velocidade *constante* igual à velocidade inicial de *P.* Conforme o tempo passa, a distância *PB* diminui a uma taxa que também é decrescente, enquanto a distância *CQ* aumenta a uma taxa uniforme. Napier definiu a distância de *Q*, de sua posição inicial *C,* como o logaritmo da distância de Pem relação a sua posição *final B.* Se considerarmos $PB = x$ e $CQ = y$, teremos:

$$y = \log \text{Nep } x,$$

onde log Nep quer dizer “logaritmo neperiano”.[1]

Podemos ver, facilmente, que esta definição de fato transforma um produto de dois números (representados como distâncias ao longo de *AB)* em uma soma de dois outros números (distâncias em relação a *C).* Supondo que o segmento *AB* representa a unidade de comprimento, vamos marcar segmentos iguais, de comprimento arbitrário, ao longo do raio a partir de *C*; Vamos chamá-los de 0, 1, 2, 3, e assim por diante. Como *Q* se move com uma velocidade uniforme, ele vai percorrer estes segmentos em intervalos de tempo iguais. Quando *P* começa a se mover *de A, Q* encontra-se em 0 (o ponto *C);* quando *P* chega na metade de *AB,* Q se encontra em 1; e quando *P* cobriu 3/4 de *AB,* Q chegou em *2,* e assim por diante. Como *x* mede a distância que *P* ainda tem de percorrer para chegar em *B,* temos a seguinte tabela:

x	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	...
y	0	1	2	3	4	5	6	...

Esta é, na verdade, uma tábua de logaritmos muito primitiva: cada número na fileira de baixo é o logaritmo (na base 1/2) do número correspondente na fileira de cima. De fato, a soma de quaisquer dois números na fileira de baixo corresponde ao produto dos números correspondentes na fileira de cima. Note que nesta tabela *y* aumenta enquanto *x* diminui, em contraste com os nossos logaritmos modernos (de base 10 ou base *e),* que aumentam à medida que os números aumentam.

Como mencionamos no Capítulo 1, mantendo a prática da trigonometria de dividir o raio de um círculo unitário em 10.000.000 de partes, Napier considerou a distância *AB* como 10^7. Se presumirmos que a velocidade inicial do ponto *P* também era 10^7, podemos descrever o movimento de *P* e *Q* em termos de duas equações diferenciais $dx/dt = -x$, $dy/dt = 10^7$, com as condições iniciais sendo $x(0) = 10^7$, $y(0) = 0$. Eliminando *t* nessas equações obtemos $dy/dx = -10^7/x$, cuja solução é $y = -10^7 \ln x + c$. Como $y = 0$ quando $x = 10^7$, teremos $c = 10^7 \ln 10^7$, e portanto $y = -10^7 (\ln x - \ln 10^7) = -10^7 \ln (x/10^7)$. Usando a fórmula $\log_b x = -\log_{1/b} x$, podemos escrever a solução como $y = 10^7 \log_{1/e} (x/10^7)$, ou $y/10^7 = \log_{1/e} (x/10^7)$. Isso mostra que, tirando o fator 10^7 (o que é meramente uma questão de mudar o ponto decimal), os logaritmos de Napier são na verdade logaritmos de base $1/e$, embora ele mesmo nunca tenha pensado em termos de base.[2]

FONTES

1. Trechos com comentários do *Constmctio* de Napier podem ser encontrados em *Classics of Mathematics,* de Ronald Calinger (Oak Park 111, Moore Publishing Company, 1982), pp. 254-260, e em *A Source Book in Mathematics, 1200-1800,* de D. J. Struik (Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1969), pp. 11-21. Ver também a edição fac-símile da tradução inglesa do *Descriptio* de Napier, feita por Wright em 1616: A *Description of the Admirable Table ofLogarithms* de John Nepair (Amsterdam: Da Capo Press, 1969), Cap. 1.
2. Carl B. Boyer, *era. A History of Mathematics,* edição revisada (1968; reimpressão Nova York: John Wiley, 1989), pp. 349-350.

Apêndice 2

A existência de lim $(1+1/n)^n$ quando $n \to \infty$

Primeiro mostramos que a seqüência

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

converge para um limite à medida que n cresce indefinidamente. Esta soma aumenta com cada termo adicional, e assim temos $S_n < S_{n+1}$, para todo *n;* isto é*,* a seqüência S_n aumenta monotonamente. Começando com n =3, também teremos $n! = 1.\ 2.\ 3\ \ldots.\ n > 1.\ 2.\ 2.\ \ldots\ 2 = ^{2n-1}$; portanto,

$$S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

para n =3, 4, 5, … Agora, nesta última soma, os termos a partir do segundo formam uma progressão geométrica com razão 1/2. O somatório desta progressão é $(1 - 1/2^n)/(1 - 1/2) = 2(1 - 1/2^n) < 2$. Daí teremos que $S_n < 1+2 = 3$, mostrando que a seqüência S_n *é* limitada superiormente por 3 (isto é, os valores de S_n nunca excedem 3). Então usamos um bem conhecido teorema de análise: Toda seqüência monótona crescente e limitada, tende para um limite quando $n \to \infty$. Assim S_n converge para um limite *S.* Nossa prova também mostra que *S* encontra-se entre 2 e 3.

Agora vamos considerar a seqüência $T_n = (1+1/n)^n$. Mostraremos que esta seqüência converge para o mesmo limite de S_n. Pelo teorema bínomial,

$$T_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\ldots$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}$$

Como a expressão dentro de cada par de parênteses é menor do que 1, temos $T_n \leq S_n$ (na verdade, $T_n < S_n$ a partír de n =2). Portanto, a seqüência T também tem um limite superior. Além disso T_n *é* monótona crescente, porque substituir n por n+1 só faz a soma aumentar. Assim T_n também converge para um limite à medida que n $\rightarrow \infty$. Chamamos esse limite de T.

Agora mostramos que $S = T$. Como $S_n \geq T_n$ para todo n, teremos $S \geq T$. Vamos demonstrar que, ao mesmo tempo $S \leq T$. Seja $m < n$ um inteiro fixo. Os primeiros termos m+1 de T_n são:

$$1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!}+\ldots$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{m!}$$

Como $m < n$ e todos os termos são positivos, esta última soma é menor do que T. Agora vamos deixar n aumentar sem limite enquanto mantemos m fixo. A soma tenderá para S_m enquanto T_n tenderá para T. Assim temos $\$_m < T$, e, consequentemente, $S<T$. Como já mostramos que $S>T$, segue-se que $S = T$, que é exatamente o que desejamos provar. O limite T, *é* claro, é o número e.

Agora vamos provar que e é irracional.[1] Nossa prova é indireta: Presumimos que e seja racional e então mostramos que esta suposição leva a uma contradição. Vamos fazer $e = p/q$, onde p e q são inteiros. Já mostramos que $2 < e < 3$, assim e não pode ser um inteiro e conseqüentemente o denominador q deve ser pelo menos 2. Agora multiplicamos ambos os lados da equação

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

por $q! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots.\ q$. No lado esquerdo isso nos dá

$$e \cdot q! = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q = p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (q-1)$$

enquanto no direito temos

$$\begin{aligned}&[q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot q + 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot q + \ldots \\ &+ (q-1) \cdot q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots\end{aligned}$$

(note que o 1 dentro das chaves vem do termo $1/q!$ na série do *e)*. O lado esquerdo é obviamente um-inteiro, porque trata-se de um produto de inteiros. No lado direito a expressão dentro das chaves também é um inteiro. Mas os termos remanescentes não são inteiros porque cada denominador é pelo menos 3. Agora mostraremos que sua soma, também não é um inteiro. Como $q \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula para a soma de uma série geométrica infinita $a + ar + ar^2 + \ldots = a/(1\text{-r})$, para $|r| < 1$. Com isso temos um inteiro no lado esquerdo da equação e um não inteiro no lado direito, obviamente uma contradição. Daí segue que *e* não pode ser uma razão entre dois inteiros — ele é irracional.

FONTE

1. Richard Courant e Herbert Robbins, *What Is Mathematics?*

(1941; reedição Londres: Oxford University Press, 1969), pp. 298-299.

Apêndice 3

Uma derivação heurística do Teorema Fundamental do Cálculo

Na figura 77 consideremos A, a área sob o gráfico de uma função $y = f(x)$, de um valor fixo de x, digamos $x = a$ (chamado de “limite inferior de integração”) até um valor variável (“o limite superior”). Para evitar confusão, vamos chamar de t o limite superior de integração, reservando a letra x para a variável independente da função $f(x)$. A área A então se torna uma função desse limite superior: $A = A(t)$. Queremos mostrar que $dA/dt = f(t)$; ou seja, *que a taxa de variação da área da função* $A(t)$, *em relação até igual ao valor de* $f(x)$ *em* $x = t$.

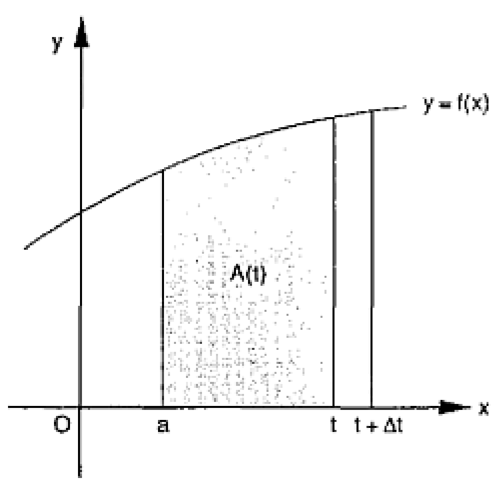


Figura 77. O Teorema Fundamental do Cálculo: a taxa de variação de uma função de área a(t) é igual ao valor de $f(x)$ em $x = t$.

Vamos nos mover do ponto $x = t$ para um ponto vizinho $x = t + \Delta t$, isto é, daremos a t um pequeno aumento Δt. A área, portanto, aumentará na quantidade $\Delta A = A(t+\Delta t) - A(t)$. A área acrescentada, para um pequeno Δt, tem a forma aproximada de uma faixa retangular de largura Δt e altura y

$=f(t)$, como podemos ver na figura 77. Assim $\Delta A \approx y\Delta t$, com a aproximação melhorando quanto menor for o Δt. Dividindo por Δt teremos $\Delta A/\Delta t \approx y$. Indo ao limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, a expressão à esquerda torna-se a derivada (taxa de variação) de A em relação a t, dA/dt. E assim temos $dA/dt = y = f(t)$, como queríamos demonstrar.

Isto mostra que a área A, considerada uma função de t, *é* uma antiderivada, ou uma integral indefinida de $f(t)$: $A = \int f(t)\, dt$. A fim de fixar o valor de A para qualquer escolha de í em particular, escrevemos $A = \int_a^t f(x)\, dx$, onde chamamos a variável de integração de x.[1] Note que $\int f(t)dt$ é uma função (função área) enquanto $\int_a^t f(x)\, dx$ é um *número*, chamado de *integral definida de* $f(x)$ *de* $x = a$ até $x = t$.

Claramente, esta dedução não é uma prova rigorosa; para uma prova completa veja qualquer texto bom sobre cálculo.

NOTA

1. A variável de integração *x é* uma “variável simbólica”; ela pode ser substituída por qualquer outra letra sem afetar o resultado.

Apêndice 4

A relação inversa entre lim $(b^h - 1)/h = 1$ e lim $(1+h)^{1/h} = b$ quando $h \to 0$

Nosso objetivo *é* determinar o valor de *b* para o qual $\lim_{b\to 0} (b^h - 1)/h$ (veja a pág. 134). Nós começamos com a expressão $(b^h - 1)/h$ para *h* finito e a igualamos a 1:

$$\frac{b^h - 1}{h} = 1. \tag{1}$$

Certamente, se esta expressão identicamente 1, então também $\lim_{b\to 0} (b^h - 1)/h$. Agora resolvemos a equação 1 para *b.* Fazemos isso em dois passos. No primeiro passo obtemos

$$b^h = 1 + h$$

e no segundo

$$b = \sqrt[h]{(1+h)} = (1+h)^{1/h} \tag{2}$$

onde substituímos o sinal de raiz por um expoente fracionário. A equação 1 expressa agora *b* como uma fimção implícita de *h,* como as equações 1 e 2 são equivalentes, fazer $h \to 0$ resultará nas expressões equivalentes

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1 \qquad \text{e} \qquad b = \lim_{h\to 0} (1+h)^{1/h}.$$

O último limite é o número *e.* Assim, para tornar a expressão $\lim_{b\to 0}$ $(b^h - 1)/h$ igual a 1, *b* deve ser escolhido como $e = 2{,}71828\ldots$

Queremos enfatizar que esta não é uma prova completa, apenas um esboço.[1] Mas, do ponto de vista didático, ela é mais simples do que a abordagem tradicional, onde começamos com a função *logarítmica,* encontramos sua derivada — um processo um tanto longo — e só então estabelecemos a base como sendo igual a e (depois disso ainda devemos reverter à função exponencial para mostrar que $d(e^x)/dx = e^x$).

NOTA

1. Para uma exposição completa, ver *Differential and Integral Calculus,* de Edmund Landau (Nova York: Chelsea Publishing Company, 1965), pp. 39-48.

Apêndice 5

Uma definição alternativa da função logarítmica

A antiderivada de x^n, desconsiderando-se a constante somada a ela, é x^{n+1} $(n+1)$, uma fórmula válida para todos os valores de n, exceto – 1 (ver pág. 107). O caso $n = -1$ era um mistério até que Grégoire Saint-Vincent descobriu que a área sob a hipérbole $y = 1/x = x^{-1}$ obedece a uma lei logarítmica. Sabemos agora que o logaritmo envolvido é o logaritmo natural (ver pág. 142); portanto, se considerarmos esta área como uma função do seu limite superior, e a denotarmos por $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo teremos $d(\ln x)/dx = 1/x$, de modo que $\ln x$ (ou, via de regra, $\ln x + c$, onde c é uma constante arbitrária) é uma antiderivada de $1/x$.

Poderíamos, entretanto, adotar uma abordagem reversa e *definir o* logaritmo natural como a área sob o gráfico de $y = 1/x$, a partir de, digamos $x = 1$, até um ponto variável $x > 1$.[1] Escrevendo esta área como uma integral, temos

$$A(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \tag{1}$$

onde chamamos a variável de integração de t para evitar confundi-la com o limite superior de integração x (também escrevemos a expressão dentro da integral como dt/t, no lugar da expressão mais formal $(1/t)dt$). Note que a equação 1 define A como uma função do limite superior de integração x. Agora mostramos que esta função tem todas as propriedades da função logarítmica natural.

Primeiro notamos que $A(1) = 0$. Segundo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que $dA/dx = 1/x$. Terceiro, para quaisquer dois números reais positivos x e y, temos a *lei da adição* $A(xy) = A(x) + A(y)$. De fato,

$$A(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{x} \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}, \qquad (2)$$

onde dividimos o intervalo de integração [1, *xy*] em dois subintervalos, [1, x] e [x, *xy*]. A primeira integral, no lado direito da equação 2, pela nossa definição é $A(x)$. Para a segunda integral fazemos a substituição (mudança de variável) $u = t/x$, isso nos dá $du = dt/x$. Note que x é uma constante no que se refere à integração). Além disso, o limite inferior de integração $t = x$ muda para $u = 1$, e o limite superior $t = xy$ torna-se $u = y$. Assim, temos

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{y} \frac{du}{u} = A(y)$$

(usamos o fato de que *teu* são "variáveis simuladas"; ver a pág 260), Isto estabelece a lei de adição.

Finalmente, como a área sob o gráfico de $1/x$ cresce continuamente, à medida que x aumenta. *A é* uma função de *x monótona crescente,* isto é, se $x > y$; então $A(x) > A(y)$. Com isso, conforme x varia de 0 ao infinito, $A(x)$ assume todos os valores reais de $-\infty$ a ∞. Mas tal propriedade significa que deve existir um número — vamos chamá-lo de e — para o qual a área sob o gráfico é exatamente igual a 1: $A(e) = 1$. Não é difícil demonstrar que este número é o limite de $(1+1/n)^n$ à medida que $n \to \infty$; ou seja, e é o mesmo número que definimos previamente como $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n$, ou 2,71828...[2] Resumindo, a função $A(x)$, definida pela equação 1, tem todas as propriedades de $\ln x$ e devemos identificá-la com $\ln x$. E como esta função é contínua e monótona crescente ela possui uma *inversa,* que chamamos de exponencial natural e denotamos por e^x.

Essa abordagem pode parecer um tanto artificial, e certamente se beneficia de um conhecimento prévio, já que sabíamos que a função $\ln x$ tinha as propriedades mencionadas. Um benefício com que nem sempre podemos contar. Existem muitas funções de aparência simples cujas antiderivadas não podem ser expressas em termos de qualquer combinação finita de funções elementares (polinômios e razões entre poíinômios, radicais, funções trigonométricas e exponenciais e seus inversos). Um exemplo de tal função é a *exponencial integral,* a antiderivada de e^x/x. Embora a antiderivada exista, não há combinação de funções elementares cuja derivada seja igual a e^{-x}/x. Nosso único recurso é *definir* a antiderivada como uma integral $\int_x^\infty (e^{-t}/t)\, dt$ (onde $x > 0$), chamá-la de *Ei(x) e* considerá-la como uma nova função. Podemos deduzir as propriedades desta função, tabular seus valores e traçá-la exatamente como fazemos com qualquer função comum.[3] Em todos os aspectos, podemos considerar tais funções "superiores" como conhecidas.

NOTAS

1. Se $0 < x < 1$, vamos considerar a área como negativa. Entretanto $A(x)$ não é definida para $x = 0$, ou para valores negativos de *x,* já que o gráfico de $1/x$ tem uma descontinuidade infinita em $x = 0$.
2. Ver *Differentiai and Integral Calculus,* de Richard Courant, vol. 1 (Londres: Blackie and Son, 1956), pp. 167-177.
3. Ver o *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, de Murray R. Spiegel, Schaums Outline Series (Nova York: McGraw-Hill, 1968), pp. 183 e 251.

Apêndice 6

Duas propriedades da espiral logarítmica

Vamos demonstrar aqui duas propriedades da espiral logarítmica mencionadas no texto.

1. Cada raio que passa pela origem atravessa a espiral com mesmo ângulo. (É devido a esta propriedade que a espiral logarítmica também é conhecida como *espiral equiangular.)*

Para provar isto vamos usar a conformalidade da função $w = e^z$, onde ambos z e w são variáveis complexas (ver Capítulo 14). Representando sem forma retangular como $x+iy$ e w na forma polar como $w = R$ cis ϕ), nós temos $R = e^x$ e $\phi = y$ (ignorando as adições de rotações completas), (ver pág. 176). Assim, linhas x =constante, verticais no plano z, são projetadas em círculos concêntricos em torno da origem do plano w, com raio $R = e$x. Já as linhas horizontais y =constante são projetadas em raios ϕ =constante, emanando da origem do plano w. Considere agora um ponto P (x, y), que se move ao longo da linha reta $y = kx$ através da origem do plano z. Seu ponto de imagem Q no plano w tem as coordenadas polares $R = e^x$, $\phi = y = kx$. Eliminando x entre essas equações obtemos $R = e^{\phi/k}$, que é a equação polar de uma espiral logarítmica. Assim, conforme P atravessa a linha $y = kx$ no plano z, seu ponto de imagem Q descreve uma espiral logarítmica no plano w. Como a linha $y = kx$ cruza no plano z todas as linhas horizontais y =constante, com um ângulo fixo, digamos α (onde tan $\alpha = k$), sua curva de imagem deve cruzar cada raio através da origem do plano w, com o mesmo ângulo — uma conseqüência do fato de que nossa transformação é conforme. Isto completa a demonstração.

Se escrevermos $\alpha = 1/k = 1/\tan\alpha = \cot\alpha$, podemos escrever a equação da espiral como $R = e^{\alpha\phi}$. Isso mostra que existe uma conexão entre a constante a (que determina a taxa de crescimento da espiral) e o ângulo α: quanto menor o α, maior será a taxa de crescimento. Para $\alpha = 90°$ nós teremos $\alpha = \cot\alpha = 0$ e portanto $R = 1$, o círculo unitário. O círculo é assim uma espiral logarítmica especial cuja taxa de crescimento é 0.

2. Comprimento do arco de qualquer ponto da espiral logarítmica até o pólo (centro) é finito, embora sejam necessárias infinitas rotações para se chegar ao pólo.

Usamos a fórmula para o comprimento do arco de uma curva dada em forma polar $r = f(\Theta)$:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (\tfrac{dr}{d\theta})^2}\, d\theta.$$

(Esta fórmula pode ser estabelecida considerando-se um pequeno elemento de comprimento de arco ds e usando-se o Teorema de Pitágoras: $ds^2 = (dr)^2 + (rd\Theta)^2$.) Para a espiral logarítmica, temos $r = e^{a\Theta r}$, $dr/d\Theta = ae^{a\Theta} = ar$.
Assim,

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (ar)^2}\, d\theta = \sqrt{1+a^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{a\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\theta_2} - e^{a\theta_1}). \qquad (1)$$

Vamos presumir que $a > 0$; isto é, r aumenta à medida que nos movemos ao longo da espiral em direção contrária à dos ponteiros do relógio (espiral no sentido da mão esquerda). Pensando em Θ_2 como fixo e fazendo $\Theta, \to \infty,$ teremos $e^{a\phi} \to 0$, e assim

$$s_\infty = \lim_{\theta_1 \to \infty} s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} e^{a\theta_2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} r_2. \qquad (2)$$

Portanto, para uma espiral como a da mão esquerda, o comprimento de arco de qualquer ponto até o pólo é dado pela equação 2, cujo lado direito tem um valor finito. Para uma espiral como a da mão direita ($a < 0$), vamos deixar $\Theta_1 \to +\infty$, chegando a uma conclusão semelhante.

A expressão no lado direito da equação 2 pode ser interpretada geometricamente. Substituindo a =cot a na equação 2 e usando as identidades trigonométricas $1+\cot^2 \alpha = 1/\text{sen}^2 \alpha$ e $\cot \alpha = \cos \alpha/\text{sen}\ \alpha$, encontramos que $[\sqrt{(1+a^2)}]/a = 1/\cos \alpha$. Daí que $s_\infty = r/\cos \alpha$, onde eliminamos o subscrito 2 sob o r. Olhando a figura 78 e considerando P como o ponto a partir do qual medimos o comprimento de arco até o pólo, teremos $\cos \alpha = OP/PT = r/PT$. Daí que $PT = r/cos\ \alpha = s_\infty$; isto é, a distância ao longo da espiral, de P até o pólo é igual ao comprimento da linha tangente à espiral de P a T. Este fato notável foi descoberto em 1645 por Evangelista Torricelli, um discípulo de Galileu, usando a soma de uma série geométrica infinita para aproximar o comprimento do arco.

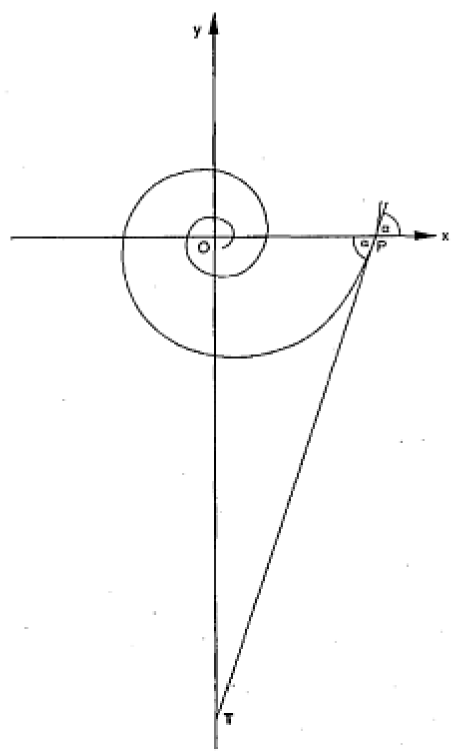


Figura 78. Retificação da espiral logarítmica: a distância *PT é* igual ao comprimento de arco de *P* a *O*.

Apêndice 7

Interpretação do parâmetro φ nas funções hiperbólicas

As funções circulares ou trigonométricas são definidas no círculo unitário $x^2+y^2=1$ pelas equações

$$\cos\varphi = x, \quad \operatorname{sen}\varphi = y \tag{1}$$

onde x e y são as coordenadas de um ponto P no círculo, e φ é o ângulo entre o eixo dos x positivos e o segmento de reta OP, medido em radianos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. As funções hiperbólicas são definidas de forma semelhante por um ponto P na hipérbole $x^2 - y^2 = 1$:

$$\cosh\varphi = x, \quad \operatorname{senh}\varphi = y \tag{2}$$

Aqui o parâmetro φ não pode ser interpretado como um ângulo. Não obstante podemos dar a φ um significado geométrico no sentido de destacar a analogia entre as duas famílias de funções.

Primeiro notamos que o parâmetro φ na equação 1 também pode ser interpretado como sendo *duas vezes a área de um setor circular de largura angular* φ *e raio 1* (fig. 79). Isso vem da fórmula para a área de um setor circular, $A = r^2\varphi/2$ (note que esta fórmula só vale se φ for medido em radianos). Agora vamos mostrar que exatamente o mesmo significado pode ser dado a φ nas equações 2, onde um setor hiperbólico substitui o setor circular.

A área sombreada *OPR* da figura 80 é igual à diferença entre as áreas do triângulo *OPS* e da região *RPS,* onde as coordenadas de R e S são (1, 0) e (x, 0) respectivamente. A primeira área é dada por $xy/2$ e a segunda por $\int_1^x y\, dx$. Substituindo y por $\sqrt{(x^2 - 1)}$ e chamando de t a variável de integração, teremos

$$A_{OPR} = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt. \qquad (3)$$

Para calcular a integral $\int_1^x \sqrt{(t^2 - 1)}\, dt$ fazemos a substituição t =cosh u, dt =senh $u\ du$. Isso muda o intervalo de integração de $[1, x]$ para $[0, \varphi]$, onde φ $=\cosh^{-1} x$. Se usarmos a identidade hiperbólica $\cosh^2 u - \mathrm{senh}^2 u = 1$, a equação (3) toma-se

$$A_{OPR} = \frac{1}{2}\cosh\varphi\ \mathrm{senh}\varphi - \int_0^{\varphi} \mathrm{senh}^2 u\ du$$

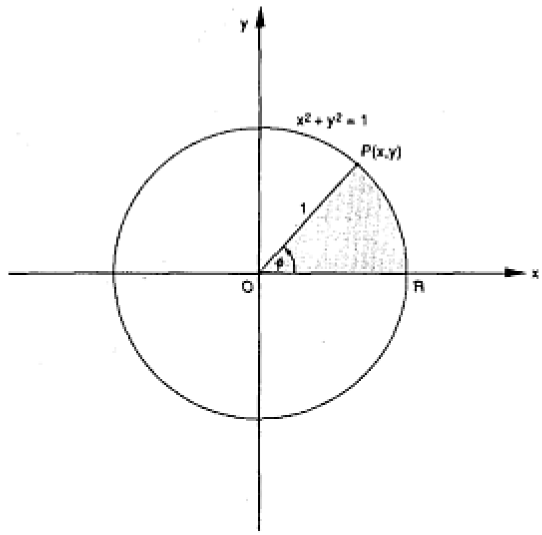


Figura 79. O círculo unitário $x^2+y^2 = 1$. O ângulo φ pode ser interpretado como duas vezes a área do segmento circular *OPR*.

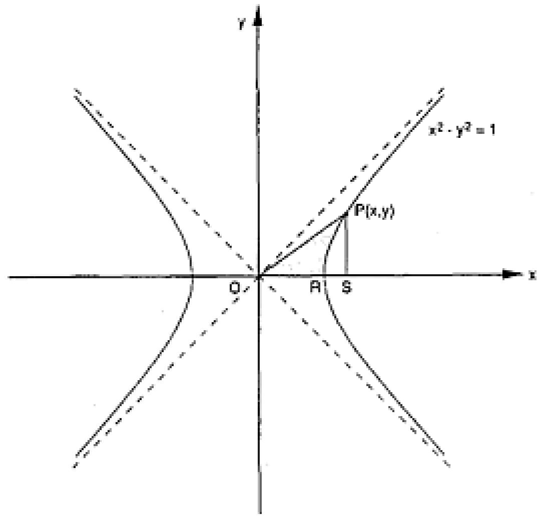


Figura 80. A hipérbole retangular $x^2 - y^2 = 1$. Se considerarmos $x = \cosh \varphi$ e $y = \operatorname{senh} \varphi$, então o parâmetro φ pode ser interpretado como duas vezes a área do segmento hiperbólico *OPR*.

Agora usamos as identidades hiperbólicas senh 2 u =2 senh u cosh u e $\operatorname{senh}^2 u = (\cosh 2u - 1)/2$. A última equação, então, torna-se:

$$A_{OPR} = \frac{1}{4} senh\, 2\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} (\cosh 2u - 1)\, du$$

$$= \frac{1}{4} senh 2\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{senh 2\varphi}{2} - \varphi\right) = \frac{\varphi}{2}.$$

Assim o parâmetro φ é igual *a duas vezes a área do segmento hiperbólico OPR*, em uma analogia exata com as funções circulares. Como mencionado anteriormente, este fato foi notado primeiro por Vincenzo Riccati por volta de 1750.

Apêndice 8

e com cem casas decimais*

$$
\begin{aligned}
e = 2{,}71828\ &18284\ 59045\ 23536\\
02874\ &71352\ 66249\ 77572\\
47093\ &69995\ 95749\ 66967\\
62772\ &40766\ 30353\ 54759\\
45713\ &82178\ 52516\ 64274
\end{aligned}
$$

*Fonte: *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The Mathematical Society of Japan (Cambridge, Mass.: MIT Press, 1980).

Bibliografia

Bali, W. W. Rouse. *A Short Account ofthe History of Mathernatics,* 1908. Reedição, Nova York: Dover, 1960

Baron, Margaret E. *The Origins of the Infinitesimal Calcultts.* 1969. Reedição, Nova York: Dover, 1987.

Beckmann, Petr. *A History ofn.* Boulder, Colorado: Golem Press, 1977.

Bell, Eric Temple. *Men of Mathernatics,* 2 vols., 1937. Reedição, Harmondsworth: Penguin Books, 1965-

Boyer, Carl B. *History ofAnalytic Geometry: Its Developments from the Pyramids to theHeroicAge,* 1956. Reedição, Princeton Junction, N.J. Scholars Bookshelf, 1988

. *A History of Mathernatics* (1968), edição revisada, Nova York: John Wiley,

1989.

. *The History of Calculus and its Conceptual Development.* Nova York: Dover,

1959.

Broad, Charlie Dunbar. *Leibniz: An Introduction.* Londres: Cambridge University Press, 1975.

Burton, David M. *The History of Mathernatics: An Introduction.* Boston: Allyn and Bacon, 1985.

Cajori, Florian. *A History of Mathernatics* (1893). segunda edição. Nova York: Macmillan, 1919.

. *A History of MathematicalNotations.* Vol. 1*Elementary Mathernatics.* Vol. 2,

Higher Mathernatics. 1928-1929. Reedição La Salle, 111.: Open Court, 1951.

. *A History of the Logarithmic Slide Rule and Allied Instruments.* Nova York:

The Engineering News Publishing Company, 1909.

Calinger, Ronald, ed. *Classics of Mathernatics.* Oak Park, 111.: Moore Publishing Company, 1982.

we reation: Issac Newton's and this Times, iNova Ahson, viaièt. York: Free Press, 1984.

f Life: Being an Account ofSpiral Formations Cook, Theodore Andrea. *The Curves*

Nature, to Science and to Art, 1914. Reedição, *and their Application to Growth in* Nova York: 1979.

Coolidge, Julian Lowell. *The Mathematics of Great Amateurs,* 1949- Reedição, Nova York: Dover, 1963.

Courant, Richard. *Differential and Integral Calculus, 2* vols., 1934. Reedição, Londres: Blaekie and Son, 1956.

Courant, Richard e Herbert Robbins. *What Is Mathematics?,* 1941. Reedição, Londres: Oxford University Press, 1969.

Dantzig, Tobias. *Number: The Language of Science.* 1930. Reedição, Nova York: Free Press, 1954. '

Descartes, René. *La Géométrie* (1637). Tradução David Eugene Smith e Mareia L. Latham. Nova York: Dover, 1954

Dorrie, Heinrich. *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution.* Tradução David Antin. 1958. Reedição, Nova York: Dover, 1965.

Edwards, Edward B. *Pattern andDesign with Dynamic Symetry.* 1932. Reedição, Nova York: Dover, 1967.

Éves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics,* 1964. Reedição, Filadélfia: Saunders College Publishing, 1983.

Fauvel, John, Raymond Flood, Michael Shortland e Robin Wilson, eds. *Let Newton Be!* Nova York: Oxford University Press, 1988.

Geiringer, Karl. *The Bach Family: Seven Generations of Creative Genius.* Londres: Allen and Unwin, 1954.

Ghyka, Matila, *The Geometry of Art and Life,* 1946. Reedição, Nova York: Dover, 1977.

Gillispie, Charles Coulston, ed. *Dictionary ofScientific Biograpby,* 16 vols. Nova York: Charles Scribners Sons, 1970-1980.

Gjersten, Derck, *The Newton Handbook.* Londres: Routledge and Kegan Paul, 1986.

Hall, A. R. *Philosophers at War: The Quarrel between Newton and Leibniz.* Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

Hambidge, Jay. *The Elements of Dynamic Symetry,* 1926. Reedição, Nova York: Dover, 1967.

Heath, Thomas L. *The Works ofArchimedes,* 1897; com suplemento, 1912. Reedição Nova York: Dover, 1953

Hollingdale, Stuart. *Makers of Mathematics.* Harmondsworth: Penguin Books, 1989.

Horsburgh,-E.M., ed. *Handbook of the Napier Tercentenary Celebration or Modern Instruments and Methods of Calculation.* 1914. Reedição, Los Angeles: Tomash Publishers, 1982

Huntley, H. E. *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty.* Nova York: Dover, 1970.

Klein, Felix. *Famous Problems ofElementary Geometry* (1895). Tradução de Wooster Woodruff Beman e David Eugene Smith. Nova York: Dover, 1956.

Kline, Morris. *Mathemarícal Thought from Ancient to Modem Times.* Nova York: Oxford University Press, 1972.

. *Mathematics: The Loss of Certainty.* Nova York: Oxford University Press, 1980.

Knopp, Konrad. *Elements ofthe Theory ofFunctions.* Tradução de Frederick Bagemihl. Nova York: Dover, 1952.

Knott, Cargill Gilston, ed. *Napier Tercentenary Memorial Volume.* Londres: Longmans, Green and Company, 1915.

Koestler, Arthur. *TheWatershed: A biography ofjohannes Kepler,* 1959. Reedição, Nova York: Doubleday, Anchor Books, 1960.

Kramer, Edna E. *The Nature and Growth of Modem Mathematics.* 1970. Reedição Princeton: Princeton University Press, 1981.

Lützen, jesper. *Joseph Liouville, 1809-1882: Master ofPure and Applied Mathematics.* Nova Yorlc Springer-Verlag. 1990.

MacDonnell, Joseph, S.J. *Jesuit Geometers.* St. Louis: Institute of Jesuit Sources e Cidade do Vaticano: Vatican Observatory Publications, 1989.

Manoel, Frank E. *A Portrait of isaac Newton.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1968.

Maor, Eli. *To Infinity and Beyond: A Cultural History ofthe Infinity.* 1987. Reedição Princeton: Princeton University Press, 1991.

Nepair, John. *A Description oftheAdmirable Table ofLogarithms.* Tradução de Edward Wright. [Londres, 1616]. Edição fac-símile. Amsterdã: Da Capo Press, 1969.

Neugebauer, Otto. *The Exact Sciences in Antiquity,* segunda edição, 1957. Reedição, Nova York: Dover, 1969.

Pedoe, Dan. *Geometry and the Liberal Arts.* Nova York: St. Martins, 1976.

Runion, Garth E. *The Golden Section and Related Curiosa.* Glenview, 111.: Scott, Foresman and Company, 1972.

Sanford, Vera. *A Short History of Mathematics,* 1930. Cambridge, Mass.: Houghton Mifflin, 1958.

Simmons, George F. *Calculus with Analytic Geometry.* Nova York: McGraw-Hill, 1985.

Smith, David Eugene. *History ofMathematics,* Vol. 1: *General Survey ofthe History of Elementary Mathematics.* Vol. 2: *Special Topics ofElementary Mathematics.* 1923, Reedição Nova York: Dover, 1958.

. *A Source Book in Mathematics,* 1929. Reedição, Nova York: Dover, 1959.

Struik, D. J., ed. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Cambridge, Mass.-Harvard University Press, 1969.

Taylor, C.A. *The Physics of Musical Sounds.* Londres: English Universities Press, 1965.

Thompson, D'Arcy W. *On Growth and Form,* 1917. Reedição, Londres e Nova York: Cambridge University Presss, 1961.

Thompson, J.E. *A Manual ofthe Slide Rule: Its History, Principie and Operation,* 1930.

Reedição, Nova York: Van Nostrand Company, 1944.

Toeplitz, Otto, *The Calculus; A Genetic Approach.* Tradução de Luise Lange, 1949.

Reedição, Chicago: University of Chicago Press, 1981.

Truesdell, C. *The Rational Mechanics ofFlexible or Elastic Bodies, 1638-1788.* Suíça: Orell Füslli Turici, 1960.

Turnbull, H. W. *The Mathematical Discoveries of Newton.* Londres: Blackie and Son, 1945.

van derWaerden, B. L. *Science Awakening* (1954). Tradução de Arnold Dresden, 1961.

Reedição, Nova York: John Wiley, 1963.

Wells, David. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers.*

Harmondsworth: Penguin Books, 1986.

Westfall, Richard S. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

Whiteside, D. T., ed. *The Mathematical Papers of Isaac Newton,* 8 vols. Cambridge: Cambridge University Press, 1967-1984.

Yates, Robert C. *Curves and Their Properties,* 1952. Reedição, Reston.Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

"(...) um excelente livro que deve fazer parte de bibliotecas públicas e escolares."
Ian Stewart, *New Scientist*

"Maor teve sucesso ao escrever esta história da matemática pequena e agradável de ler."
Peter Borwein, *Science*

"Esta história cronológica permite incursões nas vidas das pessoas envolvidas com o desenvolvimento deste núnero fascinante."
Jerry P. King, *Nature*

ISBN 978-85-01-05847-8

{*} Também conhecido com Neper. *(N. do T.)*

{†} Andrew Wiles provou em 1994 o último teorema de Fermat (apesar de haver falha na primeira demonstração, em setembro de 1994 ele a tinha corrigido), Ele recebeu, em 1997, o importante Wolfskehl Prize, no valor de 75.000 marcos alemães.